4讲、赋范线性空间与内积空间

一、赋范线性空间

二、特殊的线性空间$R^{n\times n}$　(方阵空间)上的范数

三、内积空间：内积的定义与性质

四、内积的表示

一、赋范线性空间

定义2.1 设V是数域P上的线性空间，如果定义了从V到R的映射N，满足下列条件：

（1）$N(\alpha) \geq 0$，$N(\alpha) = 0$当且仅当$\alpha = 0$ （正定条件），

（2）$N(k\alpha) = |k|N(\alpha)$，（$k \in P, \alpha \in V$） （非负齐次条件），

（3）$N(\alpha + \beta) \leq N(\alpha) + N(\beta)$，（$\alpha,\beta \in V$） （三角不等式），

则称映射$N(\alpha)$是V上的范数，定义了范数的线性空间称为赋范线性空间。

习惯上，记$N(\alpha)$为$||\alpha||$。

例　设$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}_n\end{pmatrix}^T\in \boldsymbol{C}^n$，规定$||\boldsymbol{x}||=\max\limits_{1\le i\le n}|\boldsymbol{x}_i|$，

证明$||\boldsymbol{x}||$是$\boldsymbol{C}^n$中的一个向量范数，这个范数称为x的∞－范数，作$||\boldsymbol{x}||_\infty$。

证明(1) 显然$\big|\big||\boldsymbol{x}|\big|\big|\ge \mathbf{0}$，　当$\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\Leftrightarrow ||\boldsymbol{x}||=0$。

（2）$||\boldsymbol{kx}||=\max\limits_{1\le i\le n}|\boldsymbol{kx}_i|=|\boldsymbol{k}|\max\limits_{1\le i\le n}|\boldsymbol{x}_i|=|\boldsymbol{k}|\big||\boldsymbol{x}|\big|$，

（3）$||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||=\max\limits_{1\le i\le n}|\boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{y}_i|\le\max\limits_{1\le i\le n}|\boldsymbol{x}_i|+\max\limits_{1\le i\le n}|\boldsymbol{y}_i|=||\boldsymbol{x}||+||\boldsymbol{y}||$

因此$||\boldsymbol{x}||$是$\boldsymbol{C}^n$中的一个向量范数。

同理可证：

（1）$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|$ 是C^n中的范数，这个范数称为x的$1-$范数。

（2）$\|x\|_2 = \sqrt[2]{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}$ 是C^n中的范数，这个范数称为x的$2-$范数。

（3）$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p}$（$1 \le p < \infty$）是$C^n$中的范数，这个范数称为$x$的$p-$范数。

定义2.2 若$||\alpha||$和$||\alpha||_*$是线性空间V中的两个向量范数，若存在 $M > 0, m > 0$，使得对所有$\alpha \in V$，都有 $\mathrm{m}||\alpha|| \le ||\alpha||_* \le M\,||\alpha||$，则称范数$||\alpha||$和$||\alpha||_*$等价。

定理2.1 有限维线性空间中任意两个向量范数都等价。

定义2.3 若$\{\alpha^{(k)}\}$是赋范线性空间V中的向量序列，如果存在$\alpha \in V$，使得$\lim\limits_{k\to\infty} ||\alpha^{(k)} - \alpha|| = 0$，则称序列$\{\alpha^{(k)}\}$收敛于α。

定理2.2

（1）在有限维线性空间中，若向量序列$\{\alpha^{(k)}\}$按某种范数收敛于α，则$\{\alpha^{(k)}\}$按任何范数都收敛于α；

（2） 设α_1，α_2，…，α_n是赋范线性空间V的基，$\alpha^{(k)}$在这组基下的坐标是$x^{(k)}$，α在这组基下的坐标是x，则$\{\alpha^{(k)}\}$按范数收敛于α与$\{x^{(k)}\}$收敛于x等价。

证明：(1):可证,(2)坐标收敛,可推范数收敛.反之亦然

二、特殊的线性空间$R^{n\times n}$ (方阵空间)上的范数

定义2.4　如果从$R^{n\times n}$到R的映射N，并且N满足下列条件：

（1） $N(A)\geq 0, N(A)=0$当且仅当$A=0$　　（正定条件），

（2）$N(kA)=|k|N(x)$，（$k\in R, A\in R^{n\times n}$）　　（非负齐次条件），

（3）$N(A+B)\leq N(A)+N(B)$，（$A, B\in R^{n\times n}$）　（三角不等式），

则称映射$N(A)$是$R^{n\times n}$上的广义矩阵范数。

定义2.5 如果从$R^{n\times n}$到R的映射N，并且N满足下列条件：

（1） $N(A)\geq 0$， $N(A)=0$当且仅当$A=0$ （正定条件），

（2）$N(kA)=|k|N(x)$，（$k\in R, A\in R^{n\times n}$） （非负齐次条件），

（3）$N(A+B)\leq N(A)+N(B)$，$(A,B\in R^{n\times n})$ （三角不等式），

（4）$N(AB)\leq N(A)N(B)$，$(A,B\in R^{n\times n})$ （相容条件），

则称映射$N(A)$是$R^{n\times n}$上的矩阵范数。

习惯上， $R^{n\times n}$上的矩阵范数$N(A)$记为$||A||$。

定义2.6 对$C^{n\times n}$中的矩阵范数$||A||$， C^n中的向量范数$||x||_*$，如果对任意$A\in C^{n\times n}$， $x\in C^n$，都有

$$||Ax||_*\leq ||A||\cdot ||x||_*$$

则称矩阵范数$||A||_*$与向量范数$||x||_*$相容。

例： 对$A\in C^{n\times n}$，定义$\|A\|_F=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$。

证明:1) $\|A\|_F$是一个矩阵范数(这个范数称为矩阵A的Frobenius 范数),

(2)$\|A\|_F$与$||x||_2$相容。

证明:不要求，详细证明附后面。

例如：$A=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}$，则 $\|A\|_F=\sqrt{4+4+9+16}=\sqrt{33}$.

由上面定义显然可得下面结论:

定理2.3 $\|A\|_F=\sqrt{A^H A\text{所有特征值之和}}$

证明：由矩阵特征值理论可知$A^H A$所有特征值之和就是$A^H A$对角元之和，

而$A^H A$对角元之和刚好是$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2$。

例题的证明：矩阵A可以视为C^{n^2}中的向量，所以$\|A\|_F$就是C^{n^2}中的向量的2—范数，因此 $\|A\|_F$ 满足正定条件、非负齐次条件和三角不等式。

记$\boldsymbol{A}_i=(\boldsymbol{a}_{i1},\boldsymbol{a}_{i2}\cdots\boldsymbol{a}_{in}),\ \boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\cdots\boldsymbol{x}_n)^T$，则$\boldsymbol{Ax}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{A}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_n\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_n\boldsymbol{x}\end{pmatrix}$,

由向量点乘$\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\boldsymbol{\theta}\Rightarrow|\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}|\le\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$可得

$$|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}|^2=(\boldsymbol{a}_{i1}\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{a}_{i2}\boldsymbol{x}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_{in}\boldsymbol{x}_n)^2\le(\boldsymbol{a}_{i1}^2+\boldsymbol{a}_{i2}^2+\cdots+\boldsymbol{a}_{in}^2)(\boldsymbol{x}_1^2+\boldsymbol{x}_2^2+\cdots+\boldsymbol{x}_n^2)=\|\boldsymbol{A}_i\|_2^2\|\boldsymbol{x}\|_2^2,$$

从而有 $\|\boldsymbol{Ax}\|_2^2=|\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}|^2+\cdots|\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{x}|^2\le\|\boldsymbol{A}_1\|_2^2\|\boldsymbol{x}\|_2^2+\cdots\|\boldsymbol{A}_n\|_2^2\|\boldsymbol{x}\|_2^2$

$$=(\|\boldsymbol{A}_1\|_2^2+\cdots\|\boldsymbol{A}_n\|_2^2)\|\boldsymbol{x}\|_2^2=\|\boldsymbol{A}\|_F^2\|\boldsymbol{x}\|_2^2$$

对任意$A, B \in C^{n\times n}, B = (b_1，b_2，\dots, b_n)$

$$||AB||_F^2 = ||A(b_1，b_2，\dots, b_n)||_F^2$$

$$=||(Ab_1，Ab_2，\dots, Ab_n)||_F^2$$

$$=||Ab_1||_2^2 + ||Ab_2||_2^2 + \cdots + ||Ab_n||_2^2$$

$$\leq ||A_F||_2^2||b_1||_2^2 + ||A_F||_2^2||b_2||_2^2 + \cdots + ||A_F||_2^2||b_n||_2^2$$

$$= ||A||_F^2||B||_F^2$$

这就证明了：$||A||_F$是一个矩阵范数且$||A||_F$与$||x||_2$相容。

定理2.4 对$C^{n\times n}$中的矩阵范数$\|A\|$，则在C^{n}中一定存在与它相容的向量范数，即存在向量范数$\|x\|_*$，使得$\|Ax\|_* \le \|A\|\cdot\|x\|_*$对任意对任意$A\in C^{n\times n}$， $x\in C^{n}$成立.

证明: $\forall x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$,令$\|x\|_* = \left\|\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\|$. 容易检验 $\|\bullet\|_*$ 是范数,且有

$$\|Ax\|_* = \left\|\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}\right\|_* = \left\|\begin{pmatrix} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \\ \cdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n \end{pmatrix}\right\|_* = \left\|\begin{pmatrix} a_{11}x_1+\cdots a_{1n}x_n,0,\cdots 0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1+\cdots a_{nn}x_n,0,\cdots 0 \end{pmatrix}\right\|$$

$$= \left\|\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\| \le \left\|\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\| = \|A\|\|x\|_*.$$

下面考虑反向问题.即对给定的向量范数, 能否找到矩阵范数, 使得该矩阵范数与已知的向量范数相容?

另一方面，与向量范数类似，同一矩阵它的各种范数有一定的差别, 如$\|E\| > 1$，将给理论分析与实际应用造成不便，所以要找出一种矩阵范数$\|A\|$，使得$\|E\| = 1$ 。

下面的定理给出了一种定义矩阵范数的方法，使得该矩阵范数与已知的向量范数相容，且单位矩阵的范数是1。

定理2.5 已知线性空间C^n上的范数$||x||_*$，则

$$||A||=\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_*}{\|x\|_*}$$ 是矩阵范数.

如此定义的矩阵范数称为向量范数的**诱导范数**

证明:只需检验满足矩阵范数的4条要求.

(1) $\|A\|\geq 0,\quad \|A\|=0\Leftrightarrow A=0$

(2) $\|kA\|=|k|\|A\|$

(3) $\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$

(4) $\|AB\|\leq\|A\|\|B\|$

注：如上定义的矩阵范数显然与相应的向量范数相容.

事实上，对任意非零$x \in R^n$ 有 $\frac{\|Ax\|_*}{\|x\|_*} \le \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_*}{\|x\|_*} = \|A\|$, $\Rightarrow \|Ax\|_* \le \|A\|\|x\|_*$.

对应向量的1−范数，2−范数， ∞−范数，就可以确定三个矩阵范数$\|A\|_1$，$\|A\|_2$和$\|A\|_\infty$：

$$\|A\|_1=\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \qquad \|A\|_2=\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \qquad \|A\|_\infty=\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

定理2. 6 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$,则

（1）$\|A\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$

（2）$\|A\|_2=\sqrt{\lambda_1}$(λ_1是矩阵A^TA的最大特征值。

（3）$\|A\|_1=\max\limits_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$

$$\boxed{||A||=\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_*}{\|x\|_*}}$$

分别称之为矩阵A的行（和）范数，谱范数与列（和）范数。

例 计算矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ 的1-范数、2-范数、无穷范数和Frobenius范数。

解： $\|A\|_1=6; \|A\|_\infty=7; \|A\|_F=\sqrt{33}$;

计算$A^TA=\begin{pmatrix}13 & 8\\ 8 & 20\end{pmatrix}$,求得其2个特征值$\lambda_{1,2}=\frac{33\pm\sqrt{305}}{2}$,

从而 $\|A\|_2=\sqrt{\frac{33+\sqrt{305}}{2}}$。

定理2.7 设$A \in R^{n\times n}$，U，V是n阶正交矩阵，则

(1) $||UAV||_2 = ||UA||_2 = ||AV||_2 = ||A||_2$

(2) $||UAV||_F = ||UA||_F = ||AV||_F = ||A||_F$

定理2.8 设$A \in R^{n\times n}$为对称矩阵，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$是它的$n$个特征值，则

(1) $\|A\|_2 = \max\{|\lambda_1|, \cdots |\lambda_n|\}$,

(2) $\|A\|_F = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2}$

$\|A\|_F = \sqrt{(A^H A)\text{所有特征值之和}}$

$\|A\|_2 = \sqrt{(A^H A)\text{最大特征值}}$

注：定义 $\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, \cdots |\lambda_n|\}$ 是矩阵A的谱半径，其中$\lambda_1, \cdots \lambda_n$ 是A的n个特征值

那么，当A是实对称矩阵时，$\rho(A) = \|A\|_2$.

定理2.9 $A \in C^{n\times n}$，$\|A\|$是任意 矩阵范数， 则$\rho(A) \le \|A\|$

证明：设λ是A的任一特征值，x是相应的特征向量，则有$A\,x = \lambda x$.

选取一个与矩阵范数$||A||$相容的向量范数$||x||$, 则有

$$|\lambda|\|x\| = \|\lambda x\| = \|Ax\| \le \|A\|\|x\|$$

因此A的谱半径$\rho(A) \le ||A||$。

事实上，$\rho(A) = \inf_{\|\ \|_\alpha \text{是矩阵范数}} \|A\|_\alpha$

定理2.2.9 A的谱半径$\rho(A)$ 是A的所有矩阵范数的下确界，即对任意$\varepsilon > 0$，则一定存在某一矩阵范数$\|A\|$，使得

$$\|A\| \le \rho(A) + \varepsilon$$

线性空间是解析几何中空间概念的推广。上一节中，定义了向量的范数，使线性空间成为赋范线性空间。

但是，在赋范线性空间中，还缺少欧几里德空间中的一些重要概念，即两向量之间的夹角．特别是两向量之间的正交概念．

我们知道，由于有了向量间的夹角和正交概念，也就有向量的投影等一系列概念和结论，从而建立起一整套欧几里德空间的几何理论．我们也知道，向量的夹角和正交概念可以用“向量的内积”这个更本质的概念来描述．

我们先来回顾一下R^3中向量内积的概念，对R^3中任意两个向量$\alpha=(x_1,x_2,x_3)^T$，$\beta=(y_1,y_2,y_3)^T$,α与β的内积

$$\alpha\cdot\beta=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3,$$

有了内积的概念后，R^3中任何一个向量$||\alpha||$的长度就可以由式$||\alpha||=\sqrt{\alpha\cdot\alpha}$确定，同时两个向量$\alpha$与$\beta$之间的夹角$\theta$也可以由式

$$cos\,\theta=\frac{\alpha\cdot\beta}{||\alpha||\cdot||\beta||}$$确定。

当然不能直接将R^3中的内积公式推广到一般的线性空间，与定义线性空间类似，我们用公理来引入一般线性空间的内积。

三、内积的定义与性质

定义2.7　设V是实数域R上的线性空间，$\alpha,\beta,\gamma\in V,k\in R$。在$V\times V$上定义了一个实函数$(\alpha,\beta)$，它满足下列条件：

(1)　对称性: $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$；

(2)　线性性: $(\alpha+\gamma,\beta)=(\alpha,\beta)+(\gamma,\beta),(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$;

(3)　正定性: $(\alpha,\alpha)\geq 0,$且$(\alpha,\alpha)=0$的充分必要条件是$\alpha=0.$

则称实数(α,β)为向量α与β的内积，称定义了内积的线性空间V为内积空间。

向量的内积有以下性质:

(1) $(\alpha, k\beta) = k(\alpha, \beta)$;

(2) $(\alpha, 0) = (0, \beta) = 0$;

(3) $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i, \sum_{j=1}^{n} y_i\beta_i\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_i(\alpha_i, \beta_i)$

例: 在线性空间R^n中, 对任意 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in R^n$,

定义$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$,容易检验其为内积。

例：在线性空间R^n 中，对任意$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in R^n$,

定义$(x, y) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + \cdots + n x_n y_n$,容易检验其为内积。

由此可见，对于同一个线性空间可以引入不同的内积，从而构成不同的内积空间。

例　$\varepsilon_1,\cdots\varepsilon_n$是线性空间$V$的一组基. 对$V$中任意$\alpha,\beta$,

$$\text{记}\alpha=(\varepsilon_1,\cdots\varepsilon_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \cdot\\ \cdot\\ x_n\end{pmatrix}=(\varepsilon_1,\cdots\varepsilon_n)X,\beta=(\varepsilon_1,\cdots\varepsilon_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \cdot\\ \cdot\\ y_n\end{pmatrix}=(\varepsilon_1,\cdots\varepsilon_n)Y,$$

定义$(\alpha,\beta)=X^{\mathrm{T}}AY$。　　证明:$(\alpha,\beta)$是内积 $\Leftrightarrow$ A是正定矩阵.

证明"$\Rightarrow$"　(α,β) $=(\beta,\alpha)=Y^{\mathrm{T}}AX$

$(\alpha,\beta)^T=(X^{\mathrm{T}}AY)^T=Y^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}X$ $\Rightarrow$ $Y^{\mathrm{T}}(A-A^{\mathrm{T}})X=0,$

取$X_i=e_i,Y_j=e_j,i,j=1,2\cdots n,$得 $\begin{pmatrix}e_1^{\mathrm{T}}\\ \cdots\\ e_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(A-A^{\mathrm{T}})(e_1\cdots e_n)=0,$ 即$E(A-A^{\mathrm{T}})E=0,$即$A=A^{\mathrm{T}}$。

另一方面,显然$X^{\mathrm{T}}AX=(\alpha,\alpha)\geq 0$;　若$X^{\mathrm{T}}AX=0$, 即$(\alpha,\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=0\Leftrightarrow X=0.$

综上，A是正定的。

"$\Leftarrow$"显然.

例 设$t_0,t_1,t_2,\cdots,t_m$两两互异。在实多项式空间$P_n(t)$中定义二元实函数

$$\big(f(t),g(t)\big)=\sum_{i=0}^{m} f(t_i)g(t_i)，\ f(t),g(t)\in P_n(t)$$

(1) 当$m\geq n$时，证明$\big(f(t),g(t)\big)$是$P_n(t)$上的内积。

(2) 当$m< n$时$\big(f(t),g(t)\big)$是$P_n(t)$上的内积吗？给出你的结论，并说明理由。

证 是否是内积只需检验正定性. 显然$\big(f(t),\ f(t)\big)\geq 0.$ 下证$\big(f(t),\ f(t)\big)\geq 0 \Leftrightarrow f=0.$

记$f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots a_nt^n.$ 显然$\big(f(t),f(t)\big)=0\Leftrightarrow f(t_i)=0,\ \ i=0,1,2\cdots m.$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & t_0 & t_0^2 & \cdots & t_0^n\\ 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & t_m & t_m^2 & \cdots & t_m^n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow A_{(m+1)\times(n+1)}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=0.$$

（1） 当$m \geq n$时，$r(A)=n+1$，因此

$$A_{(m+1)\times(n+1)}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}=0\text{只有零解，因此}A_{(m+1)\times(n+1)}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow f=0.$$

从而$\left(f(t),g(t)\right)$是内积。

（2） 当$m<n$时，$r(A)=m+1$，因此

$$A_{(m+1)\times(n+1)}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}=0\text{有非零解，因此}A_{(m+1)\times(n+1)}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}=0 \underset{\longleftarrow}{\overset{\times}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}=0.$$

从而$\left(f(t),g(t)\right)$不是内积。

定义2.8 在内积空间V中，非负实函数$||\alpha|| = \sqrt{(\alpha,\alpha)}$是$V$中向量$\alpha$的范数，称它为由内积导出的范数，简称导出范数．

容易验证，内积空间按导出范数成为赋范线性空间。

注: 显然,内积空间按一定是赋范线性空间,反之不然.

定理 2.10 (Cauchy – Schwarz不等式)对内积空间中的任意向量α,β，

$$(\alpha,\ \beta)^2 \le (\alpha,\ \alpha)(\beta,\ \beta).$$

证明: 取任意α，β， 考察$(t\alpha+\beta)$ ，其中t 是任意量。**由内积定义知,任意t,**

$$\big((t\alpha+\beta),\ (t\alpha+\beta)\big) \ge 0 \Rightarrow t^2(\alpha,\ \alpha)+2(\alpha,\ \beta)t+(\beta,\ \beta)\ge 0$$

$$\Rightarrow 4(\alpha,\ \beta)^2-4(\alpha,\ \alpha)(\beta,\ \beta)\le 0 \Rightarrow (\alpha,\ \beta)^2 \le (\alpha,\ \alpha)(\beta,\ \beta).$$

定义2.9 在内积空间中非零向量α与β之间的夹角θ由下式确定

$$\cos\theta = \frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}, \quad 0 \le \theta \le \pi$$

定义:对内积空间中的2个向量α，β，若$(\alpha, \beta)=0$,

则称2向量垂直或正交,记为$\alpha \perp \beta$.

定理2.11 在内积空间中非零向量α与β，若$\alpha \perp \beta$，则

$$\|\alpha+\beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2.$$

证明: $\|\alpha+\beta\|^2 = (\alpha+\beta, \alpha+\beta) = (\alpha,\alpha)+(\alpha,\beta)+(\beta,\alpha)+(\beta,\beta) = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2.$

二、内积的表示

在3维实内积空间V中，取基$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$，对于$V$中的任意两个向量$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$，有

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 \qquad \boldsymbol{\beta} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + y_3\boldsymbol{e}_3$$

由内积的性质可知

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) &= (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3, y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + y_3\boldsymbol{e}_3) \\ &= x_1y_1(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + x_1y_2(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + x_1y_3(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) \\ &\quad + x_2y_1(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) + x_2y_2(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) + x_2y_3(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \\ &\quad + x_3y_1(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) + x_3y_2(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2) + x_3y_3(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = {} & x_1 (e_1, e_1) y_1 + x_1 (e_1, e_2) y_2 + x_1 (e_1, e_3) y_3 \\
& + x_2 (e_2, e_1) y_1 + x_2 (e_2, e_2) y_2 + x_2 (e_2, e_3) y_3 \\
& + x_3 (e_3, e_1) y_1 + x_3 (e_3, e_2) y_2 + x_3 (e_3, e_3) y_3
\end{aligned}
$$

$$
= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & (e_1, e_3) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & (e_2, e_3) \\ (e_3, e_1) & (e_3, e_2) & (e_3, e_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}
$$

在n维实内积空间V中，取基$e_1, e_2, \dots, e_n$，对于V中的任意两个向量α, β，有

$$\alpha = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n \quad \beta = y_1e_1 + y_2e_2 + \cdots + y_ne_n$$

则$(\alpha, \beta) = \left(x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n, y_1e_1 + y_2e_2 + \cdots + y_ne_n\right)$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j\left(e_i, e_j\right) = \boxed{(x_1, x_2, \cdots x_n)A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}}.$$

(称为内积的表示式)

其中$A = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & \cdots & (e_1, e_n) \\ (e_1, e_1) & (e_1, e_1) & \cdots & (e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_n, e_1) & (e_n, e_2) & \cdots & (e_n, e_n) \end{pmatrix}$，称做$V$在基$e_1, e_2, \dots, e_n$下的度量矩阵。

注 由前面例题可知A是对称正定阵.

例： 如果内积空间在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的度量矩阵$A=\begin{pmatrix}10 & -3 & 4\\ -3 & 20 & 1\\ 4 & 1 & 30\end{pmatrix}$

求向量$\alpha=3\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$的长度$||\alpha||$以及它与$\alpha_1+2\alpha_2$之间的夹角。

解：$\alpha=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$. 由内积表示可知$(\alpha,\ \alpha)=(3\quad 2\quad -1)A\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}=136$, 即$\|\alpha\|=\sqrt{136}$.

$\alpha_1+2\alpha_2=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$. 由内积表示可知$(\alpha,\alpha_1+2\alpha_2)=(3\quad 2\quad -1)A\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=80$,

而$(\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_1+2\alpha_2)=(1\quad 2\quad 0)A\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=78$, 因此$\cos\theta=\dfrac{80}{\sqrt{78}\sqrt{136}}$,从而$\theta=\arccos\dfrac{80}{\sqrt{78}\sqrt{136}}$.

例 设$t_i = i, i = 0, 1, 2$。在实多项式空间$P_2(t)$中定义二元实函数

$$\big(f(t), g(t)\big) = \sum_{i=0}^{2} f(t_i) g(t_i) \qquad 如果 f(t) = 1 + 2t - t^2,\ g(t) = 2 - t + at^2$$

(1) 求$f(t)$与$g(t)$夹角。

(2) 当a为何值时，$f(t)$与$g(t)$正交。

解： 由$\big(f(t), g(t)\big) = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2)$

得 $\big(f(t), f(t)\big) = f(0)f(0) + f(1)f(1) + f(2)f(2) = 6$

$$\big(g(t), g(t)\big) = g(0)g(0) + g(1)g(1) + f(2)g(2) = 5 + 2a + 17a^2 \qquad \Rightarrow \theta = \arccos \frac{4+6a}{\sqrt{6(5+2a+17a^2}}$$

$$\big(f(t), g(t)\big) = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2) = 4 + 6a$$

显然当，$4 + 6a = 0$时，$f(t) \perp g(t)$.

定义2.10 称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$是内积空间中的正交组(正交系）是指

$$(\alpha_i,\alpha_j)=0,\quad i\neq j,\quad i,j=1,2\cdots n.$$

定理2.3.5　若$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$是n 维内积空间V中非零正交向量组，即

$$(\alpha_i,\alpha_j)=0,\quad i\neq j,\quad i,j=1,2\cdots n$$

则$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$必线性无关。

思考：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$是内积空间中的线性无关组，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$一定是非零正交组吗？

定义2.11　（1）设$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k$为n 维内积空间$V$中一个正交系，如果

$$\|\alpha_i\|=1,\quad (i=1,2,\cdots,k)$$

则称$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k$为$V$中一个标准正交系。

（2）n维内积空间中的标准正交系$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$称为标准正交基。

思考:在标准正交基下度量矩阵?内积表示?　（单位阵E）

定理2.12　**设$\boldsymbol{e_1,e_2,\dots,e_n}$是内积空间V 的标准正交基，对任意的向量$\boldsymbol{\alpha\in V}$，$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{e_1,e_2,\dots,e_n}$下的坐标为$\boldsymbol{x=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T}$，则**

$$\boldsymbol{x_i=(\alpha,e_i)\qquad i=1,2,\cdots,n}$$

证明：直接计算$(\alpha,e_i)=(\sum_{j=1}^{n}x_je_j,e_i)=\sum_{j=1}^{n}(x_je_j,e_i)=\sum_{j=1}^{n}x_j(e_j,e_i)=x_i.$

定理2.13　在n维内积空间V中必存在标准正交基$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

证明：设$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$是内积空间V中的一个基，令

$$\boldsymbol{e_1 = \beta_1}$$

$$\boldsymbol{e_k = \beta_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\beta_k, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i} \qquad \boldsymbol{k = 2, 3, \cdots, n}$$

则$e_1, e_2, \ldots, e_n$两两正交的非零向量组。

再令$\alpha_i = \dfrac{e_i}{\|e_i\|}, i = 1, 2, \cdots n.$

则$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$就是$V$的标准正交基。

这一方法称为施米特(Schmidt)正交化方法。

例 在$P_3(t)$中定义如下内积$(f(t),g(t))=\int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$

求内积空间$P_3(t)$的一组标准正交基。

解：取定$P_3(t)$中的一组基$1,t,t^2,t^3$。下面利用schmidt正交化得到一组正交基

$$g_0(t)=1;\qquad g_1(t)=t-\frac{(t,g_0)}{(g_0,g_0)}g_0=t;\qquad g_2(t)=t^2-\frac{(t^2,g_1)}{(g_1,g_1)}g_1-\frac{(t^2,g_0)}{(g_0,g_0)}g_0=t^2-\frac{1}{3}$$

$$g_3(t)=t^3-\frac{(t^3,g_2)}{(g_2,g_2)}g_2-\frac{(t^3,g_1)}{(g_1,g_1)}g_1-\frac{(t^3,g_0)}{(g_0,g_0)}g_0=t^3-\frac{3}{5}t$$

再将上述正交基单位化就得到一组标准正交基

$$\phi_0(t)=\frac{\mathbf{g}_0(t)}{\|\mathbf{g}_0(t)\|}=\frac{1}{\sqrt{2}};\quad \phi_1(t)=\frac{\mathbf{g}_1(t)}{\|\mathbf{g}_1(t)\|}=\frac{\sqrt{6}}{2}t;\quad \phi_2(t)=\frac{\mathbf{g}_2(t)}{\|\mathbf{g}_2(t)\|}=\frac{\sqrt{10}}{4}(2t^2-1);\quad \phi_3(t)=\frac{\mathbf{g}_3(t)}{\|\mathbf{g}_3(t)\|}=\frac{\sqrt{14}}{4}(5t^3-3t)$$

例 设W是内积空间V的非平凡子空间，证明:

$$W^{\perp}=\{\alpha|对所有的\beta\in W,\alpha\perp\beta\}$$

也是V的子空间.称子空间$W^{\perp}$为W的正交补。

证明：显然，$0\in W^{\perp}$，因此$W^{\perp}$不是空集。

设$\alpha_1,\alpha_2\in W^{\perp}$,则对任意$\beta\in W$,

$$(x\alpha_1+y\alpha_2,\beta)=(x\alpha_{12},\beta)+(y\alpha_2,\beta)=x(\alpha_1,\beta)+y(\alpha_2,\beta)=0,$$

即$W^{\perp}$对加法和数乘封闭。因此$W^{\perp}$是V的子空间

例　如果W是线性空间V的子空间，证明:$V=W\oplus W^{\perp}$.

证明：取W的一组标准正交基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$,

将其扩充成V的一组标准正交基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r,\cdots\alpha_n$.

下面证明$W^{\perp}=span(\alpha_{r+1},\cdots\alpha_n)$.

$\forall\alpha\in W^{\perp}$,设$\alpha=l_1\alpha_1+\cdots l_{r+1}\alpha_{r+1}\cdots l_n\alpha_n$.　对$i=1,2,\cdots r$,由（$\alpha$，$\alpha_i$）$=0$

即$(l_1\alpha_1+\cdots l_{r+1}\alpha_{r+1}\cdots l_n\alpha_n,\alpha_i)=0$得$l_i=0$ 因此$\alpha=l_{r+1}\alpha_{r+1}\cdots l_n\alpha_n\in\mathrm{span}(\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n)$.

反之，显然$\mathrm{span}(\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n)\subseteq W^{\perp}$.

综上，$V=W+W^{\perp}$. 而显然$W+W^{\perp}=W\oplus W^{\perp}$.

例 内积空间V在基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$下的度量矩阵$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

向量 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$, $\beta=2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3$, ,

(1) 求α与β之间的夹角 (2) 求$W=Span\{\alpha,\beta\}$的正交补。

解(1) $(\alpha,\alpha)=(1,1,-1)A\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=23$; $(\beta,\beta)=(2,-1,3)A\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}=10$;

$(\alpha,\beta)=(1,1,-1)A\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}=-4$

因此$\theta=\arccos\dfrac{-4}{\sqrt{230}}$.

例　内积空间V在基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$下的度量矩阵$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

向量 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$, $\beta = 2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3$, ,

(1) 求α与β之间的夹角　　　(2) 求$W = Span\{\alpha, \beta\}$的正交补。

解（2）　$\forall \gamma \in W^{T}$, 则$\gamma \perp \alpha$且$\gamma \perp \beta$。设$\gamma = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

则$(\alpha, \gamma) = (1,1,-1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$; $(\beta, \gamma) = (2,-1,3)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$,

即$\begin{cases} 11x + 5y - 7z = 0 \\ -4x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$ 得$\begin{cases} x = -\dfrac{4}{13}c \\ y = \dfrac{27}{13}c \\ z = c \end{cases}$,c任意常数。 得$\gamma = c\left(-\dfrac{4}{13}\alpha_1 + \dfrac{27}{13}\alpha_2 + \alpha_3\right)$,$c$任意常数。

即$W^{\perp} = \mathrm{span}\left(-\dfrac{4}{13}\alpha_1 + \dfrac{27}{13}\alpha_2 + \alpha_3\right)$.