工程数学基础

第1讲:矩阵及其基本运算
第2讲:矩阵的特征值与特征向量
第3讲:线性空间
第4讲:赋范线性空间与内积空间
第5讲:线性变换
第6讲:矩阵分解与线性方程组的求解方法
第7讲:广义逆与线性方程组的求解方法
第8讲:线性方程组的迭代算法
第9讲:矩阵的Jordan标准型
第10讲:最小多项式与矩阵函数
第11讲:函数插值与逼近
第12讲:数值积分与微分
第13讲:非线性方程的数值解法
第14讲:线性规划问题及其单纯形法
第15讲:非线性规划问题及其求解算法简介

矩阵理论
数值分析
规划数学

工程数学基础

- 第1阶段：前8讲（本次）
- 第2阶段：后7讲（后续安排）

考核（100分）：

1：闭卷笔试2次（40分+40分）：每一阶段结课后测试
2：结课大作业（10分）：结课1周后统一上交
3：平时成绩（10分）：出勤及在线时间

沟通：微信建群，随时答疑

备用：13366426402，主楼C1130

3讲　线性空间

一、线性空间的定义

二、线性空间的基、维数与坐标

三、线性子空间

一. 线性空间的定义

定义1.1 **设 P是一个数域，V 是一个非空集合。如果下列条件被满足，则称V 是 P 上的一个线性空间：**

（1）对V里的任意二元素，定义了一个“加法”，满足：对V中任意α,β，都有$\alpha+\beta\in \mathrm{V}$;

（2）对V里的任意元素，以及P中的任意常数，定义了一个“数乘”，满足：对V中任意α,以及P中的任意常数看k,都有 $k\alpha\in \mathrm{V}$;

（3）“加法”与“乘法”满足下列运算律：

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(3)在V 中存在零元素 0，对于V 中每一个元素α，都有 $\alpha+0=\alpha$;

(4) 在V 中存在元素α'，使得$\alpha+\alpha'$ =0，α'叫做α的负元素，记作$-\alpha$.

(5) $1\alpha=\alpha$;

(6) $(\mu k)\alpha=\mu(k\alpha)$

(7) $(\mu+k)\alpha=\mu\alpha+k\alpha$

(8) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$;

常用的线性空间如下：

(1) 数域P的全体n元数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$组成的集合$P^n$构成$P$上的一个线性空间。

(2) 数域P的全体$m \times n$矩阵组成的集合$P^{m\times n}$在通常矩阵的加法和数与矩阵的乘法下构成P上的一个线性空间，称为矩阵空间。

(3) 记 $P_n(t) = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n | a_k \in R\}$

表示至多n次多项式的全体形成的集合．则此集合在通常的多项式加法和数乘运算下构成线性空间,称为实 n次多项式空间。

注：若$P_n(t) = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n | a_k \in R 且 a_n \neq 0\}$，如何？，

答：不能构成空间（ 加法和数乘都不封闭）

例 给定 $A \in R^{m\times n}$,

(1) $N(A) = \{x|Ax = 0, x \in R^n\}$按$R^n$中的加法和数乘运算是$R$上的线性空间。称$N(A)$为矩阵$A$的零空间（核空间）。

(2) 当$b \neq 0$时，相容的线性方程组$Ax = b$的解的全体$R(A) = \{x|Ax = b, x \in R^n\}$按$R^n$中的加法和数乘运算不是$R$上不构成线性空间。

二、线性空间的基、维数与坐标

设 V是P上的一个线性空间:

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in V, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m \in P$，称 $\mu_1\alpha_1 + \mu_2\alpha_2 + \cdots + \mu_\mathrm{m}\alpha_m$ 为向量$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$的线性组合。

(2) V中α向量可表示为向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$的线性组合时，则称$\alpha$可由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$线性表示。**即** $\alpha = \mu_1\alpha_1 + \mu_2\alpha_2 + \cdots \mu_m\alpha_m$

注: 为方便起见,通常改写 $\beta = \mu_1\alpha_1 + \mu_2\alpha_2 + \cdots \mu_\mathrm{m}\alpha_m$ **为**

$$\beta = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}$$

(3) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in V$, 如果存在一组不全为零的数 $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m \in P$

使得

$$\mu_1\alpha_1 + \mu_2\alpha_2 + \cdots \mu_m\alpha_m = 0$$

（注意：此处的0不是数字0，而是0向量。）

则称向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性相关；否则称$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性无关。

4:抽象向量组的极大无关组定义

$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 是向量组，$(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_m})$ 是其子组．称该子组是原向量组的

极大无关组是指:　1) 子组线性无关,

2) 原向量组中的每个向量都能用子组线性表示

5:抽象向量组等价定义(同线代上定义)

例　讨论$R^{2\times2}$中的向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 1 & 12\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}5 & 5\\ -2 & 24\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 5 & -12\end{pmatrix},\quad \alpha_4=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 2 & -8\end{pmatrix},$$

的线性相关性。

解：设x_1, x_2, x_3, x_4使得

$$x_1\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 1 & 12\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}5 & 5\\ -2 & 24\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}4 & -2\\ 5 & -12\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}5 & -3\\ 2 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

即$$\begin{pmatrix}-x_1+5x_2+4x_3+5x_4 & 5x_1+5x_2-2x_3-3x_4\\ x_1-2x_2+5x_3+2x_4 & 12x_1+24x_2-12x_3-8x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

因此，x_1, x_2, x_3, x_4满足

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \\ 5x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0 \\ 12x_1 + 24x_2 - 12x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases}$$

由于此方程组的系数矩阵的秩是3, 所以它有非零解，故$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性相关。

定义1.2　设V是数域P上的一个线性空间，V中满足以下两个条件的向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$称为$V$的基：

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$线性无关；

(2) V中的每一个向量都可以由$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示。

此时，称 n为线性空间V的维数。线性空间V的维数记为$\dim(V)$。

维数为n的线性空间称为n维线性空间.

规定:仅含零向量的线性空间的维数是零。

例 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$。令$V_A=\{X|AX=XA, X\in R^{2\times 2}\}$,求$V_A$的基与维数。

解：首先验证 V_A 为一线性空间(略）；接下来, 按定义求此空间的基与维数。

任意 $X\in \mathrm{V_A}$，令$X=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$,

$$AX=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_3 & x_2+x_4\\ 2x_1-x_3 & 2x_2-x_4\end{pmatrix}$$

$$XA=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+2x_2 & x_1-x_2\\ x_3+2x_4 & x_3-x_4\end{pmatrix}$$

$$AX=XA \Rightarrow \begin{pmatrix}x_1+x_3 & x_2+x_4\\ 2x_1-x_3 & 2x_2-x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+2x_2 & x_1-x_2\\ x_3+2x_4 & x_3-x_4\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\boldsymbol{x_1=2x_2+x_4}\\ \boldsymbol{x_2=x_2}\\ \boldsymbol{x_3=2x_2}\\ \boldsymbol{x_4=x_4}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{2x_2+x_4} & \boldsymbol{x_2}\\ \boldsymbol{2x_2} & \boldsymbol{x_4}\end{pmatrix}=\boldsymbol{x_2}\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{2} & \mathbf{0}\end{pmatrix}+\boldsymbol{x_4}\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

考虑到$\forall \boldsymbol{X} \in \boldsymbol{V}_A$,有$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_4 & x_2 \\ 2x_2 & x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

又 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$线性无关,

因此V_A的基是$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **,维数是2.**

定理1.1　设$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$是数域$P$上的线性空间$V$的一组基，则$V$中的每一个向量都可以用 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$唯一线性表示。

证明：设$\alpha\in$V,由于$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$是线性空间的基，因此$\alpha$可以用 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性表示。 假设表示法不唯一，记

$$\alpha = x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n = y_1\alpha_1+y_2\alpha_2+\cdots+y_n\alpha_n$$

$$\Rightarrow (x_1-y_1)\alpha_1+(x_2-y_2)\alpha_2+\cdots+(x_n-y_n)\alpha_n=0$$

又$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性无关,$\Rightarrow$ $x_1-y_1=x_2-y_2=\cdots=x_n-y_n=0$

因此α可以用 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性表示，且表示法唯一。

由此可知，如果 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$的基，则

（1） V中的全体向量可以表示为：

$$V=\{x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n | x_1, x_2, \ldots, x_n \in P\}$$

(2) V中的向量α与有序$x_1, x_2, \ldots, x_n$之间构成一一对应关系。

定义1.3 设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$是数域$P$上的线性空间$V$的一组基，$\alpha \in V$。如 果有序数组$x_1, x_2, \ldots, x_n$使得

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$$

则称$x_1, x_2, \ldots, x_n$为向量α在基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$下的坐标，记作$(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$。

注：记法α=（$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$）$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

定理1.2　设$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$是数域$P$上的线性空间$V$的一组基，$\alpha,\beta\in V$，在基$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$下它们的坐标分别是$(x_1,x_2,\dots,x_n)^T$和$(y_1,y_2,\dots,y_n)^T$，则

（1）$\alpha+\beta$的坐标分别是$(x_1,x_2,\dots,x_n)^T+(y_1,y_2,\dots,y_n)^T$。

（2）$k\alpha$的坐标分别是$(kx_1,kx_2,\dots,kx_n)^T$。

一般来说，线性空间及其向量是抽象的对象，不同空间的向量完全可以具有千差万别的类别及性质,但坐标表示却把它们统一了起来.利用坐标表示把差别留给了基，由坐标所组成的新向量仅由数域中的数组表示出来。更进一步，原本抽象的“加法”及“数乘”经过坐标表示就转化为通常n维向量的加法和数乘。

基确定后,抽象向量在此基下的坐标的灵活运用

1：抽象向量与其坐标建立一一对应关系;

2：抽象向量组与矩阵（具体向量组）建立一一对应关系；

3：抽象向量组的相关性与矩阵表达的具体向量组的相关性完全一致,即

抽象向量组无关 $\Leftrightarrow$ 具体向量组无关；抽象向量组相关 $\Leftrightarrow$ 具体向量组相关。

示例： 设 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 是线性空间的一组基. $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$ 空间中抽象向量组.

记 $\beta_1=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} a_{11}\\ \cdots \\ a_{n1}\end{pmatrix}$, $\beta_2=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} a_{12}\\ \cdots \\ a_{n2}\end{pmatrix}$, $\cdots$, $\beta_m=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} a_{1m}\\ \cdots \\ a_{nm}\end{pmatrix}$,

从而有 $\underbrace{(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)}_{\text{抽象向量组}}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m}\\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm}\end{pmatrix}}_{\text{具体向量组}}$

简证： 设 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 是线性空间的一组基. $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$ 空间中抽象向量组.

且 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$

一方面，若抽象组 $(\beta_1\cdots\beta_m)$ 相关 $\Rightarrow \exists k_i$ 不全为0，使得 $(\beta_1\cdots\beta_m)\begin{pmatrix} k_1 \\ \cdots \\ k_m \end{pmatrix}=0$

$\Rightarrow(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ \cdots \\ k_m \end{pmatrix}}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ \cdots \\ k_m \end{pmatrix}=0 \Rightarrow$ 具体列向量组相关。

另一方面，设抽象组 $(\beta_1\cdots\beta_m)$ 无关。反证法，假设 $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$ 列向量组相关，

$\Rightarrow \exists k_i$ 不全为0，使得 $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ \cdots \\ k_m \end{pmatrix}=0 \Rightarrow (\beta_1\cdots\beta_m)\begin{pmatrix} k_1 \\ \cdots \\ k_m \end{pmatrix}=0 \Rightarrow$ 抽象组 $(\beta_1\cdots\beta_m)$ 相关，矛盾。

$\Rightarrow$ 具体列向量组无关。

例　求线性空间p_3(t)中的向量组f_1(t)=1+4t-2t^2+ t^3;
f_2(t)=-1+9t-3t^2+2 t^3; f_3(t)=-5+6t+ t^3;f_4(t)=5+7t-5t^2+2 t^3
的秩和一个极大无关组.

解:在线性空间$P_3(t)$中取一组基　$1,t,t^2,t^3$. 则有

$$(f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t)) = (1,t,t^2,t^3)\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 5 \\ 0 & 13 & 26 & -13 \\ 0 & -5 & -10 & 5 \\ 0 & 3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此，$(f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t))$ 的秩是2，极大无关组是 $(f_1(t), f_2(t))$

或 $(f_1(t), f_3(t))$ 或 $(f_1(t), f_4(t))$.

向量在不同基下的坐标之间的关系

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$和$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$是线性空间$V$的的两组基，且满足：

$$\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n \\ \beta_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n \\ \qquad \dots\dots\dots\dots \\ \beta_n = a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n \end{cases}$$

改写(2.1.2)式成如下形式

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)A, \quad \text{其中 } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

定义1.4 称矩阵A为由基$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$到基$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$的过渡矩阵.

称公式(2.1.3)为由基$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$到基$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$的基变换公式。

定理1.3 设 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$和$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$是线性空间$V$的的两组基。

基$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$到基$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$的过渡矩阵是$A$。$\alpha$是$V$中向量。

若$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)x$；且$\alpha=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)y$，则 $x=Ay$ 。

证：记$(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)A$.

则α $=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\boxed{x}$;

$=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)y=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\boxed{Ay}$ $\Rightarrow$ $x=Ay.$

定理2.1.4

1)$\alpha_1,\dots,\alpha_n$和$\beta_1,\dots,\beta_n$是空间V的两组基且$(\beta_1,\dots,\beta_n)=\alpha_1,\dots,\alpha_n)A$,

则A 可逆且$(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\beta_1,,\dots,\beta_n)A^{-1}$.

2)设 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$是基,A 是 可逆矩阵。则$(\beta_1,\dots,\beta_n)=\alpha_1,\dots,\alpha_n)A$ 必为一组基。

基的构造

例 已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是3维线性空间$V$的一组基，向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3$满足

$$\beta_1+\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \qquad \beta_1+\beta_2=\alpha_2+\alpha_3 \qquad \beta_2+\beta_3=\alpha_1+\alpha_3$$

(1) 证明：β_1,β_2,β_3也是V的一组基。

(2) 求由基β_1,β_2,β_3到基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的过渡矩阵。

(3)求向量$\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$在基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$下的坐标。

解:容易得

$$\beta_1=\alpha_2+\frac{1}{2}\alpha_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\ \beta_2=\frac{1}{2}\alpha_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad \beta_3=\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

容易得 $$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)C$$

又C可逆,因此$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 是一组基.

由上得 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)C^{-1}$，也即 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$到$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的过度阵是 C^{-1}，容易求得 $C^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&-1&2\\1&0&0\end{pmatrix}$

$$\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)C^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$$

因此 $\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$在基$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$下的坐是 $\begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix}$.

例　设$R^{2\times 2}$的两组基为：

(I) $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$　(II) $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

试求：**(1)由基(I)到基(II)的过渡矩阵；**

(2)求在基(I)与基(II)下有相同坐标的矩阵。

解(1)取$R^{2\times 2}$中的一组自然基 $(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$

则

$$(I)=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})A$$

$$(II)=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})B.$$

因此,

$(II)=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})B=(I)A^{-1}B,$　　**即**(I)**到**(II) **的过渡矩阵是** $A^{-1}B=???.$

解(2)设 $C=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ 在基(I)与(II)下有相同的坐标.

由 $C=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}=(I)A^{-1}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}$ 以及 $C=(II)B^{-1}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}$

可得 $A^{-1}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}=B^{-1}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}$, 因此 $(A^{-1}-B^{-1})\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}=0.$

也即$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}$就是 $(A^{-1}-B^{-1})X=0$ 的解. $X=???$

三、线性子空间

定义1.5　设V是数域P上的一个线性空间，S为V中的一个非空子集。若S对于V中定义的加法与数乘构成一个线性空间，则S称为V的线性子空间。

定理1.4　线性空间V的非空子集S构成子空间的充分必要条件是S对于V中的线性运算封闭，即：对任意$\alpha,\beta \in S, k \in P$，都有

$$\alpha+\beta \in S\,, k\alpha \in S.$$

单独一个零向量构成的子集$\{0\}$与V都是V的线性子空间，称它们为线性空间V的平凡子空间。

显然，如果S是V的一个线性子空间，则必有$\dim(S) \leq \dim(V)$

例　线性空间$R^{2\times 2}$中的下列子集合是否是线性子空间?为什么?

$$(1)\ V_1=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \middle| a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}=0\right\}$$

$$(2)\ V_2=\{A|\det(A)=0\}$$

解　$\forall \quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\in V_1,\quad \boldsymbol{B}\in\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\in V_1$　则有

$$a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}=0 \qquad b_{11}+b_{12}+b_{21}+b_{22}=0$$

从而　$(a_{11}+b_{11})+(a_{12}+b_{12})+(a_{21}+b_{21})+(a_{22}+b_{22})=0$

$$aa_{11}+aa_{12}+aa_{21}+aa_{22}=a(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})=0$$

因此 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}\in V_1\quad a\boldsymbol{A}\in V_1$　即　V_1 构成子空间.

(2) $V_2 = \{A | \det(A) = 0\}$不构成子空间。

事实上，如果取 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,则

A_1，$A_2 \in V$，但$A_1 + A_2$不在V中，即V对加法不封闭。

例　$R^{2\times 3}$的下列子集是否构成子空间？

$$(1)\ W_1=\left\{\begin{pmatrix}1 & b & 0\\ 0 & c & d\end{pmatrix}\middle|\, b,c,d\in R\right\};$$

$$(2)\ W_2=\left\{\begin{pmatrix}a & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}\middle|\, a+b+c=0, a,b,c\in R\right\}.$$

解（1）不能；（2）能

定理1.5 设W是n维线性空间V的一个r 维子空间（$r < n$），$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$是$W$的一组基。则$V$ 中存在$n-r$ 个向量$\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_n$，使得$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$为V的一组基。

基的扩充定理

如果V是数域P上的一个线性空间, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是给定的m个向量.

定义一个集合S：由$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$的一切线性组合构成，即

$$S = \{\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_m\alpha_m | \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m \in P\}.$$

显然集合S非空,且S对于V中的线性运算封闭,因此S是V的子空间。

称子空间S为由$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$所生成的子空间, 记作 $Span\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$。

其中$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$称为子空间$S$的生成元。

思考：$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$是不是$Span\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$的基?

定理1.6 记S=$Span\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$, 则 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$的极大线性无关组是$S$ 的基， $\dim(S)$等于向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$的秩。

例 设有$P_3(t)$中的多项式组

f_1(t)=1+4t-2t^2+ t^3; f_2(t)=-1+9t-3t^2+2 t^3;

f_3(t)=-5+6t+ t^3; f_4(t)=5+7t-5t^2+2 t^3

(1) 求$Span\{f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t)\}$的基与维数。

(2) 将(1)中所求得的$Span\{f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t)\}$的基扩充成$P_3(t)$的基。

解(1) 只需寻找 $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, $\boldsymbol{f}_3$, $\boldsymbol{f}_4$ 的极大无关组

$$(f_1, f_2, f_3, f_4) = (1_1, t, t^2, t^3)\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1_1, t, t^2, t^3)A$$

因为 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 5 \\ 0 & 13 & 26 & -13 \\ 0 & -5 & -10 & 5 \\ 0 & 3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

因此, 原生成子空间维书数2, 基 (f_1, f_2)

解(2)

$$(f_1, f_2, ?, ?) = (1, t, t^2, t^3)\begin{pmatrix} 1 & -1 & ? & ? \\ 4 & 9 & ? & ? \\ -2 & -3 & ? & ? \\ 1 & 2 & ? & ? \end{pmatrix} = (1, t, t^2, t^3)B$$

添加后2列，使得形成可逆矩阵. 因为 $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 13 \neq 0,$

因此，添加后2列为 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 产生可逆阵,

也即，添加以 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为坐标的向量 t^2, t^3 就得到原空间的基(f_1, f_2, t^2, t^3).

子空间的交与和

定理1.6　设V_1,V_2是线性空间V的子空间，则$V_1\cap V_2$也是V的子空间，称这个子空间为V_1与V_2的交空间。

证明：因为V_1,V_2是线性空间V的子空间，所以 $0\in V_1, 0\in V_2$ 从而$V_1\cap V_2$不是空集。

对任意的$k\in P,\alpha,\beta\in V_1\cap V_2$，则

1) $\alpha,\beta\in V_1$. 由于V_1是V的子空间,因此 $\alpha+\beta\in V_1$,$k\alpha\in V_1$；

2) $\alpha,\beta\in V_2$. 由于V_2是V的子空间,因此 $\alpha+\beta\in V_2$,$k\alpha\in V_2$；

因此 $\alpha+\beta\in V_1\cap V_2, k\alpha\in V_1\cap V_2$. 故 $V_1\cap V_2$也是V的子空间。

定理1.7 设V_1,V_2是线性空间V的子空间，则

$$V_1+V_1=\{\alpha_1+\alpha_2|\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2\}$$

也是V的子空间，称这个子空间为V_1与V_2的和空间。**证明:略.**

注意：V_1,V_2是线性空间V的子空间，$V_1\cup V_2$一般不是V的线性子空间.

例如 $V_1=\{(x_1,0)^T|x_1\in R\}$，$V_2=\{(0,x_2)^T|x_2\in R\}$,$V_1,V_2$是$R^2$的子空间.

但$V_1\cup V_2$不是R^2的子空间。这是因为对加法不封闭，例如

取$\alpha_1=(1,0)^T\in V_1$，$\alpha_2=(0,1)^T\in V_2$,

则$\alpha_1+\alpha_2=(1,0)^T+(0,1)^T=(1,1)\notin V_1\cup V_2$，即$V_1\cup V_2$对加法运算不封闭。

定理1.8　如果$V_1 = Span\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}, V_2 = Span\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t\}$,那么

$$V_1+V_2 = Span\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t\}$$

证明：因为等式两端都是子空间,所以要证相等只需要证明2个集合相等,即互相包含.

$$"\subseteq", \quad \forall \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2, \ \boldsymbol{\alpha} = \gamma_1 + \gamma_2$$

$$= \boldsymbol{k}_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots \boldsymbol{k}_s\boldsymbol{\alpha}_s + \boldsymbol{l}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots \boldsymbol{l}_t\boldsymbol{\beta}_t \in \text{右侧};$$

$$"\supseteq", \quad \forall \boldsymbol{\alpha} \in \text{右侧}; \quad \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots \boldsymbol{p}_s\boldsymbol{\alpha}_s + \boldsymbol{q}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots \boldsymbol{q}_t\boldsymbol{\beta}_t$$

$$= \boldsymbol{\delta}_1 + \boldsymbol{\delta}_2 \in \boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2.$$

例　设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}$，　$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，　$\beta_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$，　$\beta_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\7\end{pmatrix}$，

令$V_1=span\{\alpha_1,\ \alpha_2\}$，　$V_2=span\{\beta_1,\ \beta_2\}$，

求$V_1\cap V_2$，V_1+V_2　的基与维数。

解：$V_1+V_2=span\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2\}$，

而
$$\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\2&1&-1&-1\\1&1&0&3\\0&1&1&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\0&3&-5&-3\\0&2&-2&2\\0&1&1&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\0&1&-3&-5\\0&0&4&12\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

因此向量组α_1，α_2，β_1，β_2的一个极大无关组是α_1，α_2，β_1，

V_1+V_2的一组基是α_1，α_2，β_1，而$\dim(V_1+V_2)$=3.

下面求$V_1\cap V_2$的基与维数。

对任意$\alpha\in V_1\cap V_2$，必存在常数$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$与$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$使得

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{\beta}_2$$

即有$\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}$，即$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\beta}_1,-\boldsymbol{\beta}_2)\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1\\\boldsymbol{a}_2\\\boldsymbol{b}_1\\\boldsymbol{b}_2\end{pmatrix}=\mathbf{0}$

即$\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1\\\boldsymbol{a}_2\\\boldsymbol{b}_1\\\boldsymbol{b}_2\end{pmatrix}$刚好是方程组$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$的解，其中，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\beta}_1,-\boldsymbol{\beta}_2)=\begin{pmatrix}1&-1&-2&-1\\2&1&1&1\\1&1&0&-3\\0&1&-1&-7\end{pmatrix}$.

解得$\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1\\\boldsymbol{a}_2\\\boldsymbol{b}_1\\\boldsymbol{b}_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{k}\begin{pmatrix}1\\-4\\3\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{k}$任意。因此$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{k}\begin{pmatrix}5\\-2\\-3\\-4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{k}$任意，即$V_1\cap V_2$的基是$\begin{pmatrix}5\\-2\\-3\\-4\end{pmatrix}$。

从而$\dim(V_1\cap V_2)=1$。

$$V_1 \cap V_2 \begin{matrix} \subseteq V_1 \\ \subseteq V_2 \end{matrix} \subseteq V_1 + V_2$$

定理1.9　设V_1,V_2是线性空间V的两个子空间，则

$$\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1)+\dim(V_2)-\dim(V_1\cap V_2)$$

证明：设$\dim(V_1)=n_1 \dim(V_2)=n_2, \dim(V_1\cap V_2)=r$

取$V_1\cap V_2$ 的基 $\alpha_1,\cdots\alpha_r$ $\begin{cases} \text{扩充成 } V_1 \text{ 的基 } \alpha_1,\cdots\alpha_r, \beta_1,\cdots\beta_{n_1-r}; \\ \text{扩充成 } V_2 \text{ 的基} \alpha_1,\cdots\alpha_r, e_1,\cdots e_{n_2-r} \end{cases}$

则 $V_1+V_2=Span\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r,\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_{n_1-r},e_1,e_2,\dots,e_{n_2-r}\}$

要证结论,只需证明$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r,\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_{n_1-r},e_1,e_2,\dots,e_{n_2-r}$ **线性无关.**

如此则V_1+V_2维数是n_1+n_2-r，结论得证。

令数$x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_{n_1-r}, z_1, z_2, \dots, z_{n_2-r}$使得

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_r\alpha_r + y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + \cdots + y_{n_1-r}\beta_{n_1-r} + \underline{z_1e_1 + z_2e_2 + \cdots + z_{n_2-r}e_{n_2-r}} = 0$$

移向得$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_r\alpha_r + y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + \cdots + y_{n_1-r}\beta_{n_1-r} = -z_1e_1 - z_2e_2 - \cdots - z_{n_2-r}e_{n_2-r}$

令$\gamma = \underbrace{x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_r\alpha_r + y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + \cdots + y_{n_1-r}\beta_{n_1-r}}_{(1)} = \underbrace{-z_1e_1 - z_2e_2 - \cdots - z_{n_2-r}e_{n_2-r}}_{(2)}$

则由(1)和（2)式知$\gamma \in V_1 \cap V_2$，从而存在系数λ_1，λ_2，$\dots \lambda_r$使得

$$\gamma = \underbrace{\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_r\alpha_r}_{(3)},$$

由γ的第（2）和（3）式得$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_r\alpha_r + z_1e_1 + z_2e_2 + \cdots + z_{n_2-r}e_{n_2-r} = 0$.

考虑到α_1，α_2，$\dots$，α_r，e_1，e_2，$\dots$，e_{n_2-r}是V_2的基，可得$\lambda_i = 0, z_i = 0$.

从而$\gamma = 0$. 由(1)式得$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_r\alpha_r + y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + \cdots + y_{n_1-r}\beta_{n_1-r} = 0$,

考虑到α_1，α_2，$\dots$，α_r，β_1，β_2，，β_{n_1-r}是V_1的基，可得$x_i = 0, y_i = 0$.

综上有，$x_i = 0, y_i = 0$，$z_i = 0$，即得$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n_1-r}$，$e_1, e_2, \dots, e_{n_2-r}$线性无关。

例　V_1和V_2是n维线性空间V的两个子空间。已知

$\dim(V_1)+\dim(V_2)>n$，　　证明：$V_1\cap V_2$中含有非零元。

证明：由维数公式$\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1)+\dim(V_2)-\dim(V_1\cap V_2)$

$$\dim(V_1\cap V_2)=\dim(V_1)+\dim(V_2)-\dim(V_1+V_2)$$

$$>n-\dim(V_1+V_2)\geqslant 0$$

即有$\dim(V_1\cap V_2)>0$即$V_1\cap V_2$中含有非零元。

定义1.6　设V_1,V_2是线性空间V的两个子空间，若V_1+V_2中每个向量的分解式　$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$　$(\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2)$

是唯一的，则称V_1+V_2为直和，记作$V_1\oplus V_2$.

定理1.10　设V_1,V_2是线性空间V的两个子空间，则下列条件相互等价:

（1）V_1+V_2为直和。　　（2）$V_1\cap V_2=\{0\}$ 。

(3)零向量的分解式唯一，即若$\alpha_1+\alpha_2=0$，则必有$\alpha_1=\alpha_2=0$。

(4) V_1+V_2的基由V_1的基与V_2的基合并而成。

(5)　$\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1)+\dim(V_2)$

（1）$\Rightarrow$（2）

$\forall \alpha \in V_1 \cap V_2$，有$0=\alpha+(-\alpha)\in V_1 \cap V_2$，又 $0=0+0$，由直和定 知 $\alpha=-\alpha=0$

（2）$\Rightarrow$（3）

令 $0=\alpha_1+\alpha_2=\beta_1+\beta_2\in V_1+V_2$，则 $\alpha_1-\beta_1=\alpha_2-\beta_2\in V_1\cap V_2$，

因此$\alpha_1=\beta_1$，$\alpha_2=\beta_2$。

（3）$\Rightarrow$（4）

令V_1的基$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，V_2的基$\beta_1,\cdots\beta_n$. 则 $V_1+V_2=\mathrm{span}\{\alpha_1\cdots\alpha_m, \beta_1\cdots\beta_n\}$.

令 $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m+h_1\beta_1+\cdots+h_n\beta_n=0$ 则

$0=(k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m)+(h_1\beta_1+\cdots+h_n\beta_n)\in V_1+V_2$. 因此

$k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=0$； $h_1\beta_1+\cdots+h_n\beta_n=0$. 从而 $k_i=h_i=0$, （4）$\Rightarrow$（5）　**显然**

（5）$\Rightarrow$（1）

（5）$\Rightarrow$（2）$\Rightarrow$（1）

例　设$R^{2\times 2}$的两个子空间为

$$V_1=\left\{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \middle| 2x_1+3x_2-x_3=0, x_1+2x_2+x_3-x_4=0\right\}$$

$$V_2=Span\left\{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a+2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & a+8 \end{pmatrix}\right\}$$

1）　**求V_1的基与维数**

2）　a为何值时，V_1+V_2为直和；当V_1+V_2不是直和时，求$V_1\cap V_2$的维数。

解：(1)设 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in V_1$,则 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

解得 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = k_1(1,0,2,3) + k_2(0,1,3,5)$

即得 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

故V_1的基是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ $\dim(V_1) = 2$

(2) $\forall \alpha \subseteq V_1 \cap V_2$ 则存在常数 x_1, x_2, x_3, x_4 使得

$$\alpha = x_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix} = x_3\begin{pmatrix}2 & -1\\ a+2 & 1\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 4 & a+8\end{pmatrix}$$

即 $\begin{pmatrix} x_1 - 2x_3 + x_4 & x_2 + x_3 - 2x_4 \\ 2x_1 + 3x_2 - (a+2)x_3 - 4x_4 & 3x_1 + 5x_2 - x_3 - (a+8)x_4 \end{pmatrix} = 0$

即 $\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - (a+2)x_3 - 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 - (a+8)x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $Ax = 0$ 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -a-2 & -4 \\ 3 & 5 & -1 & -a-8 \end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-2&1\\0&1&1&-2\\2&3&-a-2&-4\\3&5&-1&-a-8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-2&1\\0&1&1&-2\\0&0&-a-1&0\\0&0&0&-a-1\end{pmatrix}$$

当$a\neq$-1时， $r(A)=4\Rightarrow Ax=0$ **只有0解，**即$V_1\cap V_2=\{O\}\Rightarrow V_1+V_2$ **是直和**;

当a=-1时， $r(A)=2$ **这时** $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_3-x_4\\-x_3+2x_4\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$

从而

$$\alpha=x_1\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0&1\\3&5\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}2&-1\\a+2&1\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}-1&2\\4&a+8\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}2&-1\\1&1\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}-1&2\\4&7\end{pmatrix},x_3,x_4\text{任意。}$$

故 $V_1\cap V_2=V_2$, $\begin{pmatrix}2&-1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&2\\4&7\end{pmatrix}$ **是** $V_1\cap V_2$ **的基** $\dim(V_1\cap V_2)=2$

定义**1.7**　若$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}_1\oplus\boldsymbol{V}_2$，**则称**

$\boldsymbol{V}_1$与$\boldsymbol{V}_2$ 互补　V_1是V_2的补空间，　V_2是V_1的补空间，　称
$\boldsymbol{V}_1\oplus\boldsymbol{V}_2$为V 的直和分解。

例：设R$^{n\times n}$的2个子空间 $S_1=\{A|A^T=A\}$， $S_2=\{A|A^T=-A\}$

(1）证明：$\mathrm{R}^{n\times n}=S_1\oplus S_2$ (2)如果$n=3$,求S_1的一组基及$\dim(S_2)$.

解：对任意矩阵A,令 $B=\frac{A+A^T}{2}, C=\frac{A-A^T}{2}$ **则有** $\mathbf{B}\in\mathbf{S}_1$**，** $C\in\mathbf{S}_2$**，**

且**A=B+C,** 因此 $\mathrm{R}^{n\times n}\subseteq S_1+S_2$**;**

反之显然， $\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2\subseteq\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 因此$\boldsymbol{R}^{n\times n}=\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2$

若$A\in S_1\cap S_2$，由$A\in S_1$有$A^T=A$,$A\in S_2$有$A^T=-A$，从而$A=\mathbf{0}_{n\times n}$，即$S_1\cap S_2=\{\mathbf{0}_{n\times n}\}$。综上所证，有$\mathbb{R}^{n\times n}=S_1\oplus S_2$。

解（2）当$n=3$时，如果$A\in S_1$,则

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}=\boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{a}_{22}\boldsymbol{E}_{22}+\boldsymbol{a}_{33}\boldsymbol{E}_{33}+\boldsymbol{a}_{12}(\boldsymbol{E}_{12}+\boldsymbol{E}_{21})+\boldsymbol{a}_{13}(\boldsymbol{E}_{13}+\boldsymbol{E}_{31})+\boldsymbol{a}_{23}(\boldsymbol{E}_{23}+\boldsymbol{E}_{32})$$

这表明：A可以用

$$E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12}+E_{21}, E_{13}+E_{31}, E_{32}+E_{23}$$

线性表示，而且它们线性无关，因此它们是S_1的基。

$$dim(S_2)=dim(\mathbb{R}^{3\times 3})-dim(S_1)=9-6=3$$