5讲　线性变换

一 线性变换及其运算

二 线性变换的表示矩阵

三 线性变换的特征值与特征向量

一、线性变换及其运算

定义3.1 设$\boldsymbol{T}$是数域$\boldsymbol{P}$上的线性空间$\boldsymbol{V}$到自身的映射，如果下列条件满足，则称$\boldsymbol{T}$是线性空间上的线性变换，

（1）对任意的α，$\beta \in \boldsymbol{V}, \boldsymbol{T}(\alpha+\beta)=\boldsymbol{T}(\alpha)+\boldsymbol{T}(\beta)$,

（2）对任意的$\alpha \in \boldsymbol{V}, \boldsymbol{k} \in \boldsymbol{P},, \boldsymbol{T}(\boldsymbol{k}\alpha)=\boldsymbol{kT}(\alpha)$.

例： $\boldsymbol{P_n}$**(t)**表示至多**n**次多项式的全体形成的线性空间，定义变换：

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}))=\int_0^1 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt},\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) \in \boldsymbol{P_n}(\mathbf{t}),$$

则$\boldsymbol{T}$是$\boldsymbol{P_n}$**(t)**上的线性变换。

例　判定矩阵空间$R^{n\times n}$ 上的下列变换T是否为线性变换:

1)任意$X \in R^{n\times n}$，$T_1 X = AX - XB$,其中A, B是给定非零矩阵;

2)任意$X \in R^{n\times n}$，$T_2 X = AXB + C$,其中A, B, C是给定非零矩阵.

解:容易检验

T_1**是线性变换**; 因为$T_1(X+Y) = T_1(X) + T_2(Y)$;　$T_1(kX) = kT_1(X)$.

T_2**是线性变换**; 因为$T_2(X+Y) \neq T_2(X) + T_2(Y)$。

注: (1) $T(0)=0, T(-\alpha)=-T(\alpha)$

表明:T作用到抽象向量组的组合上,形式上组合系数直接提到外面,

同理,T作用到抽象组乘以矩阵上,矩阵可以直接提到外面,即

$$T\big((\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A\big)=T(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A$$

(2) 若$\beta = x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_n\end{pmatrix}$

$$\text{则}T(\beta)=T\left((\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_n\end{pmatrix}\right)=T(x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n)=T(x_1\alpha_1)+\cdots+T(x_n\alpha_n)$$

$$=x_1T(\alpha_1)+\cdots+x_nT(\alpha_n)=(T(\alpha_1),\cdots,T(\alpha_n))\begin{pmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_n\end{pmatrix}=T(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

(3) 如果$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$相关，则$T\alpha_1$，$T\alpha_2\cdots T\alpha_n$线性相关。

证:因$\alpha_1,\cdots$，α_n相关， 故存在不全0的$k_1,\cdots k_n$使得$k_1\alpha_1+\cdots k_n\alpha_n=0$. 从而:

$k_1T(\alpha_1)+\cdots k_nT(\alpha_n) = T(k_1\alpha_1+\cdots k_n\alpha_n)=T(0)=0.$ 即$T(\alpha_1),\cdots$，$T(\alpha_n)$相关.

定义3.2 对$\forall\alpha\in V$,都有$T(\alpha)=0$，则称T是零变换;

都有$T(\alpha)=\alpha$，则称T是恒等变换.

定义3.3 设T是数域P上的线性空间V上的线性变换，

（1）V中所有向量的象$T(V)$称作T的值域，记作$R(T)$,

（2）V中所有T映射成零的向量全体称作T 的核，记作$Ker(T)$或$N(T)$.

定理3.1 线性空间V上的线性变换f的值域$R(f)$和核$N(f)$都是V的线性子空间。

证明： 任取$f(x)$，$f(y) \in R(f)$, 有

$$f(x)+f(y)=f(x+y)\in R(f), kf(x)=f(kx)\in R(f),$$

值域$R(f)$ 是V的线性子空间。

任取x，$y \in N(f)$, 有

$$f(x+y)=f(x)+f(y)=0, \text{即}(x+y)\in N(f),$$

$$f(kx)=kf(x)=0, \text{即}(kx)\in N(f),$$

核$N(f)$ 是V的线性子空间。

定义3.4 值域$R(f)$的维数记为$r(f)$,称为变换f的秩，$N(f)$的维数记为$ker(f)$,称为变换f的亏度。

定理3.2 T是线性空间V上的线性变换。若线性空间V的一组基为α_1，$\alpha_2\cdots\alpha_n$,则 $R(f)=\mathrm{span}\{T(\alpha_1)，T(\alpha_2)\cdots T(\alpha_n)\}$

证明："⊂" $\forall\alpha\in V$，记$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2\cdots+x_n\alpha_n$,则

$T(\alpha)=T(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2\cdots+x_n\alpha_n)=x_1T(\alpha_1)+x_2T(\alpha_2)+\cdots+x_nT(\alpha_n)\in$ 右侧

反包含“$\supset$”，$\forall\beta\in\mathrm{span}\{T(\alpha_1)，T(\alpha_2)\cdots T(\alpha_n)\}$，

则$\beta=y_1T(\alpha_1)+y_2T(\alpha_2)+\cdots+y_nT(\alpha_n)=T(y_1\alpha_1+y_2\alpha_2\cdots+y_n\alpha_n)\in R(f)$.

定理3.3 T是n维线性空间V上的线性变换。则

$$r(f)+ker(f)=n.$$

证明：令$\alpha_1, \alpha_2,\cdots\alpha_r$ 是$N(T)$的基.

把$\alpha_1, \alpha_2,\cdots\alpha_r$扩充成V的基$\alpha_1, \alpha_2,\cdots\alpha_{r+1},\cdots\alpha_n$. 则有

$$R(T)=span(T\alpha_1, T\alpha_2,\cdots T\alpha_r, T\alpha_{r+1},\cdots T\alpha_n)=span(T\alpha_{r+1},\cdots T\alpha_n).$$

下面证明$T\alpha_{r+1},\cdots T\alpha_n$线性无关。

令$k_{r+1}T\alpha_{r+1}+\cdots k_nT\alpha_n=0$，则有$T(k_{r+1}\alpha_{r+1}+\cdots k_n\alpha_n)=0$,

因此$(k_{r+1}\alpha_{r+1}+\cdots k_n\alpha_n)\in N(T)$。从而 $k_{r+1}\alpha_{r+1}+\cdots k_n\alpha_n=q_1\alpha_1+\cdots q_r\alpha_r$.

即有 $q_1\alpha_1+\cdots q_r\alpha_r-k_{r+1}\alpha_{r+1}-\cdots-k_n\alpha_n=0$. 因此$k_{r+1}=k_{r+2}\cdots=k_n=0$，

因此$\dim R(T)=n-r$.

例： $p_4(t)$中的线性变换T定义如下

$$T(f(x)) = f'' + f(1).$$

求$R(T)$的基与维数，$N(T)$的基与维数。

解： 取$p_4(t)$的基$1, x, x^2\ x^3, x^4$,

则 $R(T)$=span$\{T(1), T(x), T(x^2), T(x^3), T(x^4)\}$,

=span$\{1, 1, 3, 6x+1, 12x^2+1\}$

=span$\{1, 6x+1, 12x^2+1\}$

=span$\{1, x, x^2\}$

因此$1, x, x^2$是$R(T)$的基，维数3.

下面求核空间.

任取$\alpha\in N(T)$,记$\alpha=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$,

即$T(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4)=\mathbf{0}$。

即$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+2a_2+6a_3x+12a_4x^2=0$.

则$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+2a_2=0$； $+6a_3=0$；$12a_4=0$.

得$a_4=0$, $a_3=0$, $a_2=a_2$, $a_1=a_1$, $a_0=-a_1-3a_2$.

因此$\alpha=a_1(x-1)+a_2(x^2-3)$

故$(x-1)$，(x^2-3)是$N(T)$的基，维数是2.

例： $\boldsymbol{R}^{2\times 2}$上的线性变换$\boldsymbol{T}$定义如下：$\boldsymbol{TX=MX-XM}$,其中$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$,

求$\boldsymbol{R(T)}$和$\boldsymbol{N(T)}$的基与维数。

解：取$R^{2\times 2}$的基$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$，则

$$T(E_{11})=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\quad T(E_{12})=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\quad T(E_{21})=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & -2\end{pmatrix}\quad T(E_{22})=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

显然$\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & -2\end{pmatrix}$**是极大无关组，为**$\boldsymbol{R(T)}$**的基**

故$\boldsymbol{R(T)=span\left\{\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & -2\end{pmatrix}\right\}},\mathbf{dim}\,\boldsymbol{R(T)}=2,$

下面求$N(T)$

设$X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in N(T)$,

由$T(X)=MX-XM=\begin{pmatrix} -2x_3 & -2x_1-2x_2-2x_4 \\ 2x_3 & -2x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x_1-2x_2-2x_4 \\ x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-k_1-k_2 \\ x_2=k_1 \\ x_3=0 \\ x_4=k_2 \end{cases} \Rightarrow X=\begin{pmatrix} -k_1-k_2 & k_1 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}，k_1,k_2\text{任意。}$$

由此可得$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$是$N(T)$的基，维数是**2.**

例：定义$P_3(x)$上的线性变换如下：$\forall f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\in P_3(x)$,

$$Tf(x)=(a_0-a_1)+(a_1-a_2)x+(a_2-a_3)x^2+(a_3-a_0)x^3$$

求$R(T)$与$N(T)$的基与维数。

解：取$P_3(x)$**的基**1，x，x^2，x^3．由T的定义得：

$$T1=1-x^3\quad Tx=-1+x\quad Tx^2=-x+x^2\quad Tx^3=-x^2+x^3$$

因此$R(T)=span\{1-x^3,-1+x,-x+x^2,-x^2+x^3\}$.

而$\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\-1&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ **故**$R(T)$**的基为**$T1,Tx,Tx^2$, $\dim R(T)=3$.

令$f(x) \in N(T)$, 即$T(f(x)) = 0$，得

$$Tf(x) = (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2)x + (a_2 - a_3)x^2 + (a_3 - a_0)x^3 = 0$$

$$\Rightarrow a_0 - a_1 = 0，\ a_1 - a_2 = 0，\ a_2 - a_3 = 0，\ a_3 - a_0 = 0$$

$\Rightarrow a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = c$，$c$任意

$$\Rightarrow f(x) = c(1 + x + x^2 + x^3)$$

得$N(T)$的基为$(1 + x + x^2 + x^3)$, $\Rightarrow \dim N(T) = 1.$

例：定义$P_{\mathrm{n}}(x)$上的线性变换如下：$T\big(f(x)\big)=xf'(x)-f(x)$.

求 （1）$N(T)$;

(2) 证明： $P_{\mathrm{n}}(x)=R(T)\oplus N(T)$.

解：任取$f(x)\in N(T)$. 则$T(f(x))=xf'(x)-f(x)=0$

解此微分方程可得$f(x)=kx,k$任意。$N(T)=span\{x\}$，且$\dim N(T)=1$。

取$P_n(x)$的一组基$1,x,x^2,\cdots,x^n$,

$$T(1)=-1,T(x)=0,T(x^2)=x^2,T(x^3)=2x^3,\cdots,T(x^n)=(n-1)x^n$$

则$R(T)=span\left\{1,x^2,2x^3,\cdots,(n-1)x^n\right\}$， 且显然$\dim R(T)=n$.

易见$N(T)\cap R(T)=\{\theta\}$，因此$N(T)+R(T)=N(T)\oplus R(T)$。

由维数公式知$\dim(N(T)+R(T))=\mathrm{din}N(T)+\dim R(T)=n+1$, $\Rightarrow P_n(x)=R(T)\oplus N(T)$.

定理3.4 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n$是$V$一组基,$T$是线性变换。则

T是单射 $\Leftrightarrow T(\alpha_1),T(\alpha_2)\cdots T(\alpha_n)$无关 $\Leftrightarrow \boldsymbol{R(T)=V} \Leftrightarrow T$满$\Leftrightarrow N(T)=0$

证: 以第一个等价条件为例。

$\Rightarrow$ 令$k_1T(\alpha_1)+k_2T(\alpha_2)+\cdots+k_nT(\alpha_n)=0.$ 则有$T(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n)=0$。

由单可知$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0,\ \Rightarrow k_1=k_2=\cdots=k_n=0$

即$T(\alpha_1),T(\alpha_2)\cdots T(\alpha_n)$无关。

$\Leftarrow$ **证明T单。** 令$T(\alpha)=T(\beta)$. 则$T(\alpha-\beta)=0$. 设$(\alpha-\beta)=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_n\end{pmatrix}$。

则有$\boldsymbol{0}=T(\alpha-\beta)=T\left((\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_n\end{pmatrix}\right)=(T\alpha_1,T\alpha_2\cdots T\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_n\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}\Rightarrow(\alpha-\beta)=0.$

即$\alpha=\beta$。

定义3.5 T_1和T_2都是V上的线性变换，若$T_1T_2=T_2T_1=I$，则称T_1和T_2互为逆变换，称T_1是T_2的逆变换。

定理：T既单又满，则T存在逆变换，且其逆变换是线性变换。

证明 只需检验$T^{-1}(\alpha+\beta)=T^{-1}(\alpha)+T^{-1}(\beta);T^{-1}(k\alpha)=kT^{-1}(\alpha)$。

因为$T(T^{-1}(\alpha+\beta))=(\alpha+\beta)=T(T^{-1}(\alpha))+T(T^{-1}(\beta))=T(T^{-1}(\alpha)+T^{-1}(\beta))$

由T单知$T^{-1}(\alpha+\beta)=T^{-1}(\alpha)+T^{-1}(\beta)$;

因为$T(T^{-1}(k\alpha))=k\alpha=kT(T^{-1}(\alpha))=T(kT^{-1}(\alpha))$,

由T单知$T^{-1}(k\alpha)=kT^{-1}(\alpha)$.

定义3.6 T是线性空间V上的线性变换，W是V的子空间，如果$\forall\alpha\in W$,都有$T(\alpha)\in W$,那么称W是T的不变子空间，简称T-子空间。

显然,{0}和V是任何线性变换的不变子空间，称为平凡的不变子空间。

显然，$R(T)$和$N(T)$都是T的不变子空间

定理：若V_1,V_2是T的不变子空间,则$V_1\cap V_2$，V_1+V_2也是T的不变子空间。

证明：容易检验。

二、 线性变换的表示矩阵

设T是数域P上线性空间V中的线性变换。取V的一组基$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$。

记$T(\alpha_1) = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + a_{n1}\alpha_n$

$T(\alpha_2) = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{n2}\alpha_n$

$\cdots\cdots\cdots$

$T(\alpha_n) = a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n$

借鉴矩阵乘法的计算公式，$T(\alpha_1), T(\alpha_2), \dots, T(\alpha_n)$与$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

可以表示成如下形式 $\underline{(T(\alpha_1), T(\alpha_2), \dots, T(\alpha_n)})$）$= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)A$

其中$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 称为线性变换T在基$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$下的表示矩阵。

更一般的，可以表示为 $T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)A$

例 设线性空间 P^3上 的线性变换为σ，且 $\sigma\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_1+x_2\end{pmatrix}$

求σ在标准基$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵.

解: $\sigma(\varepsilon_1)=\sigma\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\sigma(\varepsilon_2)=\sigma\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\sigma(\varepsilon_3)=\sigma\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)}\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$$

例　已知$P_3(x)$上的线性变换

$$Tf(x)=(a_0-a_2)+(a_1-a_3)x+(a_2-a_0)x^2+(a_3-a_1)x^3$$

求T**在基**1，x，x^2，x^3**下的矩阵。**

解：$T(1)=1-x^2, T(x)=x-x^3, T(x^2)=-1+x^2, T(x^3)=-1+x^3$

从而$T(1, x, x^2, x^3)=(1, x, x^2, x^3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=(1, x, x^2, x^3)\,\mathrm{A}.$

得T**在基**$(1, x, x^2, x^3)$**下的矩阵为**A.

定理3.5 设T是线性空间V中的线性变换。$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$是$V$的基，$T$关于基$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$的表示矩阵为$A$，$\alpha, T(\alpha)$在基$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$下的坐标分别是$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$和$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$,则

$$(y_1, y_2, \dots, y_n)^T = A(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

证明： 一方面，$T(\alpha) = T\left((\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = T(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)A\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}}$

另一方面，$T(\alpha) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\boxed{\begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}}$ 因此，$(y_1, y_2, \dots, y_n)^T = A(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

注：由$(T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_n))=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$，结合前面结论知：

A可逆 $\Longleftrightarrow$ $(T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_n))$ 无关 $\Longleftrightarrow$ **R(T)满** $\Longleftrightarrow$ **T单** $\Longleftrightarrow$ **T可逆**

定理3.6 设A，B分别是线性变换T_1, T_2在基$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$下的表示矩阵，那么在基$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$下：

1) $T_1 + T_2$的表示矩阵为$A + B$；

2) kT_1的表示矩阵为kA；

3) T_1T_2的表示矩阵为AB；

4) 若T_1可逆，那么T_1^{-1}的矩阵为A^{-1}。

定理3.7 设在线性空间V中，由基$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$到基$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$的过渡矩阵为$P$，$V$中的线性变换$T$在这两个基下的表示矩阵分别为$A$，$B$，则

$$B=P^{-1}AP$$

证明：记$T(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$=$(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)A$。 记基$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$到基$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$的过渡矩阵为$P$，即（$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$）=$(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)P$。

$$T(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)B=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\boxed{PB}$$

$$T(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)=T[(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)P]=T(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\boxed{AP}$$

因此 $PB=AP$， 即$B=P^{-1}AP$

例: $\boldsymbol{R}^{2\times 2}$ 上的变换 $T(X)=XN, S(X)=XM$， 其中$N=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}, M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 0\end{pmatrix}$.

求: (1)$T+S$，TS在基$E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$下的矩阵

(2) T, S是否可逆?若可逆,求其逆变换

解:易得T,S在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ **下的矩阵为** $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

故$T+S$，TS在基$E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵

$$A+B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}, AB=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ -2 & -2 & 0 & 0\\ -2 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

（2)因$|A|\neq 0,|B|=0,$故T可逆，S不可逆。

$$\forall X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\in R^{2\times 2}$$，由$T(X)=XN$得$T^{-1}(T(X))=T^{-1}(XN)=T^{-1}(X)N,$

即$$T^{-1}(X)=XN^{-1}=X\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1+x_2 & x_1-x_2 \\ x_3+x_4 & x_3-x_4 \end{pmatrix}$$

例：在$\boldsymbol{R}^3$中，取$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$为$\boldsymbol{R}^3$中的自然基。

求下列线性变换在指定基下的矩阵。

（1） $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=(2\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_1)$.求$\boldsymbol{T}$在$\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3$下的矩阵。

(2) $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$是$\boldsymbol{R}^3$中的基. $\boldsymbol{T}$在$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\eta}_3$下的矩阵是$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$.

求$\boldsymbol{T}$在$\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3$下的矩阵。

(3) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$是$\boldsymbol{R}^3$中的基。$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\alpha}_1)=\begin{pmatrix}-5\\0\\3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\alpha}_2)=\begin{pmatrix}0\\-1\\6\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}-5\\-1\\9\end{pmatrix}$.

求T在基（$\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3$）和$\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$下的矩阵.

例：在$\boldsymbol{R}^3$中，取$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$为$\boldsymbol{R}^3$中的自然基。

（1） $T(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_2,x_2+x_3,x_1)$.求$T$在$\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3$下的矩阵。

解(1)因为$T(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=(2x_1-x_2,x_2+x_3,x_1)^{\mathrm{T}}$

则$T(1,0,0)^{\mathrm{T}}=(2,0,1)^{\mathrm{T}}$

$T(0,1,0)^{\mathrm{T}}=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$ $\quad T(0,0,1)^{\mathrm{T}}=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$

所以$T(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)A$

$A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$即为所求。

(2) $\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\eta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\eta_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$是$R^3$中的基. T在η_1, η_2, η_3下的矩阵是$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$.

求T在ε_1, ε_2, ε_3下的矩阵。

解:(2)因为$\eta_1=(-1,1,1)^T,\eta_2=(1,0,-1)^T,\eta_3=(0,1,1)^T$,

所以$(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)C$

由已知$T(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)B$。

因此$T(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=T((\eta_1,\eta_2,\eta_3)C^{-1})=T(\eta_1,\eta_2,\eta_3)C^{-1}=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)BC^{-1}$

$$=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)CBC^{-1}$$

于是CBC^{-1}=？为T在自然基下矩阵。

$$(3)\ \alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$$ 是 R^3 中的基。$T(\alpha_1)=\begin{pmatrix}-5\\0\\3\end{pmatrix}, T(\alpha_2)=\begin{pmatrix}0\\-1\\6\end{pmatrix}, T(\alpha_3)=\begin{pmatrix}-5\\-1\\9\end{pmatrix}$.

求T在基 $(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3)$ 和 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 下的矩阵.

解:(3)显然
$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}-1&0&3\\0&1&-1\\2&1&0\end{pmatrix}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\mathbf{K}$$

由已知
$$T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}-5&0&-5\\0&-1&-1\\3&6&9\end{pmatrix}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)N=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)K^{-1}N$$

因此T在基 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 下的矩阵为 $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{N}=?$.

又
$$T(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=T((\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)K^{-1})=T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)K^{-1}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)NK^{-1}$$

因此**T**在基 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ 下的矩阵为 $\mathbf{NK}^{-1}=?$.

例： α_1，α_2，α_3是线性空间V的一组基。T 是V 上的线性变换，且有

$$T(\alpha_1)=\alpha_1+2\alpha_3, T(\alpha_2)=\alpha_2+2\alpha_3, T(\alpha_1)=\alpha_1+2\alpha_2+5\alpha_3.$$

(1) 证明T是可逆的线性变换。

(2) 求$3T - T^{-1}$ 在α_1，α_2，α_3下的矩阵。

证明(1)：因为T在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$，

而$\det(A)=-1$，所以A可逆，从而T是可逆变换

证明(2) T^{-1}在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵是

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\2&2&5\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-2&1\\-4&-3&2\\2&2&-1\end{pmatrix}$$

因此$3T-T^{-1}$在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵是

$$3A-A^{-1}=\begin{pmatrix}4&2&2\\4&6&4\\4&4&16\end{pmatrix}$$

三 线性变换的特征值与特征向量

定义4.1 设T是数域P上n维线性空间V的线性变换。如果对于数域P中的某一个数λ_0，存在非零向量$\alpha \in V$，使得$T(\alpha) = \lambda_0 \alpha$成立，则称$\lambda_0$为线性变换$T$的特征值，$\alpha$称为线性变换T的属于特征值$\lambda_0$的特征向量。

定义4.2 设T是数域P上n维线性空间V的线性变换。若λ_0是线性变换T的特征值. 记$T_{\lambda_0} = \{\alpha | T(\alpha) = \lambda_0 \alpha\}$, 则容易验证$T_{\lambda_0}$是 V的子空间，称为是称为线性变换T相应于特征值λ_0的特征子空间，其维数称为λ_0 的几何重数。

如何求线性变换的特征值和特征向量?

设T是数域P上n维线性空间V的线性变换。在V中取定一组基

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$， T在这组基下的矩阵是A.

令$\xi = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$是T相应于$\lambda$的特征向量，即$T\xi = \lambda\xi$，则

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\lambda\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}} = \lambda\xi = T\left((\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}}$$

说明λ是A的特征值，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$是A相应于$\lambda$的特征向量。

反之。若$A\begin{pmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_n\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_n\end{pmatrix}$且$\begin{pmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_n\end{pmatrix}\neq 0$，即$\lambda$是A的特征值。那么，

$$T\left(\boxed{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_n\end{pmatrix}}\right)=T((\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n))\begin{pmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_n\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\lambda\begin{pmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_n\end{pmatrix}=\lambda\boxed{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_n\end{pmatrix}}$$

即$\zeta=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_n\end{pmatrix}\neq 0$是T的相应于特征值$\lambda$的特征向量.

综上,求线性变换的特征值和特征向量转化成线性变换在取定基下的矩阵的特征值和特征向量.

因为线性变换在不同基下的矩阵是相似的,而相似矩阵具有相同的特征值,

所以，求 f的特征值与基无关，因此，通常取一组简单基求出线性变换在

该基下的矩阵,进而求该矩阵的特征值与特征向量。变换的特征向量与基有关。

$$\zeta=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

例　设线性变换$\boldsymbol{\sigma}$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix},$$

求$\boldsymbol{\sigma}$特征值与特征向量.

解：A的特征多项式

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}\quad=\lambda^3-3\lambda^2-9\lambda-5$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix},$$

$$|\lambda E-A|=\lambda^3-3\lambda^2-9\lambda-5=0$$

方程如有整数解，则整数解可被常数项整除,故猜想此方程组有整数解1,-1,5,-5

经试算知-1是一个解，进一步,

$$|\lambda E-A|=\lambda^3-3\lambda^2-9\lambda-5=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$$

求出另外两个解 $\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=5$

把$\lambda=-1$代入齐次方程组$(\lambda E-A)X=0$, 得

$$\begin{cases}-2x_1-2x_2-2x_3=0\\-2x_1-2x_2-2x_3=0\\-2x_1-2x_2-2x_3=0\end{cases}$$ 即 $$x_1+x_2+x_3=0$$

它的一个基础解系为：$(1,0,-1)$，$(0,1,-1)$

因此，属于 -1 的两个线性无关的特征向量为

$$\xi_1=\varepsilon_1-\varepsilon_3，\ \xi_2=\varepsilon_2-\varepsilon_3$$

而属于 -1 的全部特征向量为

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2,\qquad (k_1,k_2\in P \text{ 不全为零})$$

把$\lambda=5$代入齐次方程组$(\lambda E-A)X=0$,得

$$\begin{cases} 4x_1-2x_2-2x_3=0 \\ -2x_1+4x_2-2x_3=0 \\ -2x_1-2x_2+4x_3=0 \end{cases}$$

解得它的一个基础解系为：$(1,1,1)$

因此，属于5的一个线性无关的特征向量为

$$\xi_3=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$$

而属于5的全部特征向量为

$$k_3\xi_3, \qquad (k_3\in P,\ k_3\neq 0\ )$$

例：已知$\boldsymbol{R}^{2\times2}$上的的线性变换$\boldsymbol{T(X)=MXN}$，

其中$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}\end{pmatrix}, \boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{-1}\\\mathbf{-1}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$。

求T的特征值和特征向量

解：取$\boldsymbol{R}^{2\times2}$的基$\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22}$,

可求得T在此基下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{-1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{-1}&\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{-1}&\mathbf{1}&\mathbf{-1}\\\mathbf{-1}&\mathbf{1}&\mathbf{-1}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

由$\left|\lambda E - A\right| = 0$得特征值$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$，$\lambda_3 = \lambda_4 = 2$

当$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$时，解（0E-A)X=O得A相应于0的特征向量

$$p_1 = (1,1,0,0)^T, p_2 = (0,0,1,1)^T$$

当$\lambda_3 = \lambda_4 = 2$时，解（2E-A)X=0得A的相应于2的特征向量

$$p_3 = (0,0,1,-1)^T$$

相应的，

当$\lambda_1=\lambda_2=0$时，T的特征向量是$X_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$，$X_2=\begin{pmatrix}0&0\\-1&1\end{pmatrix}$

从而，T相应于特征值0得全部特征向量是$k_1X_1+k_2X_2,k_1,k_2$不全为零。

当$\lambda_3=\lambda_4=2$时，　T的特征向量是 $X_3=\begin{pmatrix}0&0\\-1&1\end{pmatrix}$

从而，T相应于特征值2的全部特征向量全部特征向量是kX_3，$k\neq0$

特征值的应用十分广泛，但其计算却不是一件容易的事。下面我们介绍一种利用矩阵本身的元素来确定其特征值的较为精确的近似值及其分布区域的方法，即所谓的圆盘定理。

定理 2.6.7（圆盘定理 1） 设矩阵 $A=(a_{ij})\in C^n$，记

$R_i=\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|=\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|-|a_{ii}| \quad (i=1,2,\cdots,n)$，将复平面上中心在 a_{ii}，

半径为 R_i 的圆形区域记为 S_i，即

$$S_i=\{z\,\|z-a_{ii}|\le R_i\}\ (i=1,2,\cdots,n),$$

矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2,\cdots\lambda_n$，则

$$\lambda_i\in S=S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_n \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

S 叫做矩阵 A 的（行）**Gerschgorin** 区，$S_i=\{z\,\|z-a_{ii}|\le R_i\}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 叫做矩阵 A 的（行）**Gerschgorin** 圆盘。

定理 2.6.8（圆盘定理 2）如果矩阵 A 的行 Gerschgorin 区的某一连通部分 G 由 m 个 Gerschgorin 行圆盘的并集所构成，则 G 中有且仅有矩阵 A 的 m 个特征值。

例：估计矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & i & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} & 5 & \frac{i}{2} \\ -1 & 0 & 0 & 5i \end{pmatrix}$ 的特征值分布范围

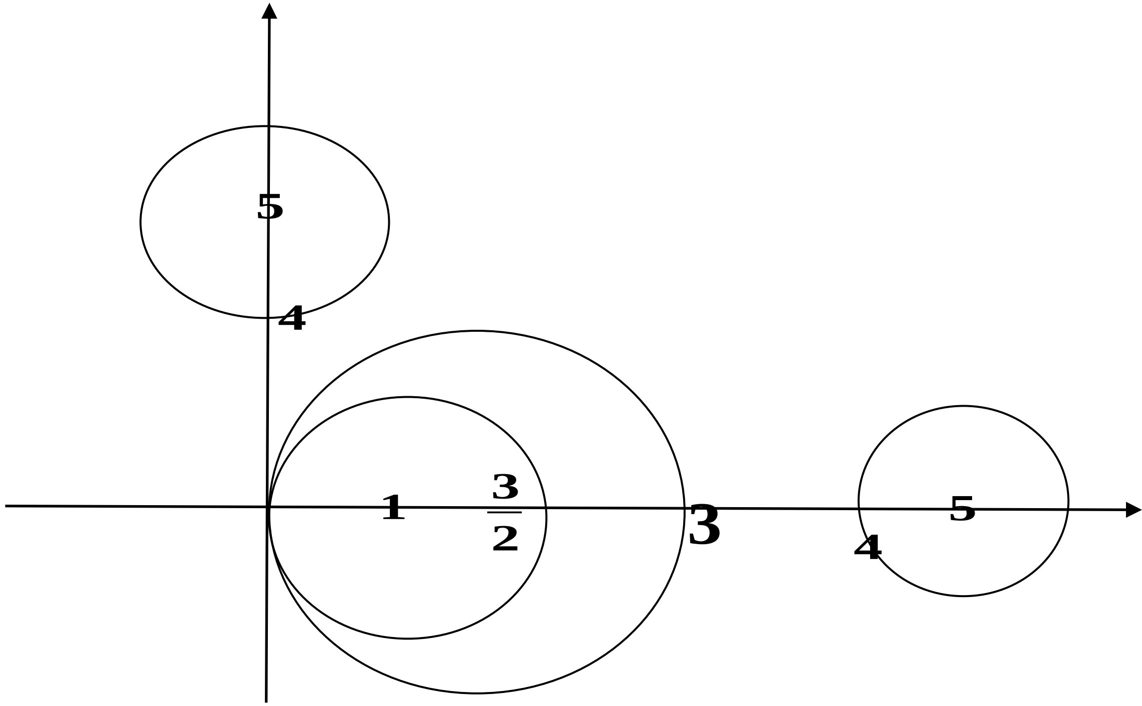
解

$$S_1=\{|z-1|\le|a_{12}|+|a_{13}|+|a_{14}|=1\},$$

$$S_2=\left\{\left|z-\frac{3}{2}\right|\le|a_{21}|+|a_{23}|+|a_{24}|=\frac{3}{2}\right\},$$

$$S_3=\{|z-5|\le|a_{31}|+|a_{32}|+|a_{34}|=1\},$$

$$S_4=\{|z-5i|\le|a_{41}|+|a_{42}|+|a_{43}|=1\},$$



例 2.18 证明$A=\begin{pmatrix} 9 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$**至少有两个实特征值。**

解

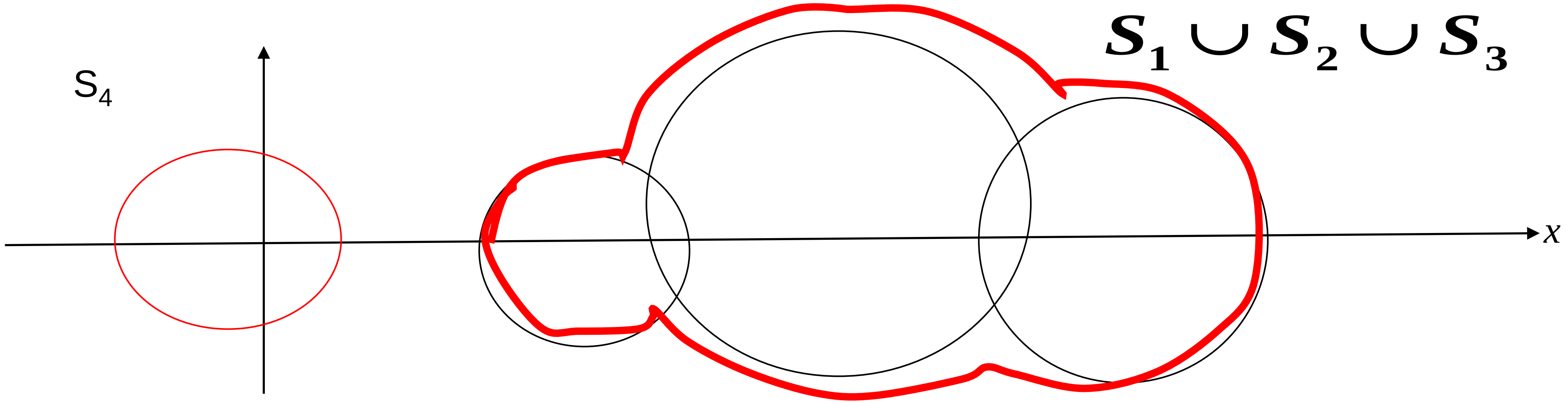
$$\because a_{11}=9, a_{22}=8, a_{33}=4, a_{44}=-1$$

$$\therefore S_1=\{|z-9| \leq |a_{12}|+|a_{13}|+|a_{14}|=4\},$$

$$S_2=\{|z-8| \leq |a_{21}|+|a_{23}|+|a_{24}|=5\},$$

$$S_3=\{|z-4| \leq |a_{31}|+|a_{32}|+|a_{34}|=1\},$$

$$S_4=\{|z+1| \leq |a_{41}|+|a_{42}|+|a_{43}|=2\},$$



由于A是实矩阵，他的特征值必成对出现。

所以孤立圆S_4中有且仅有一个特征值,且必为实特征值.

$S_1 \cup S_2 \cup S_3$ 是三个圆域取并,其中必有三个特征值，这3个特征值至少有一个实特征值.

综上,至少有2个实征值.

推论 1.2.1. 设n阶矩阵A 的n 个圆盘两两不相交，则

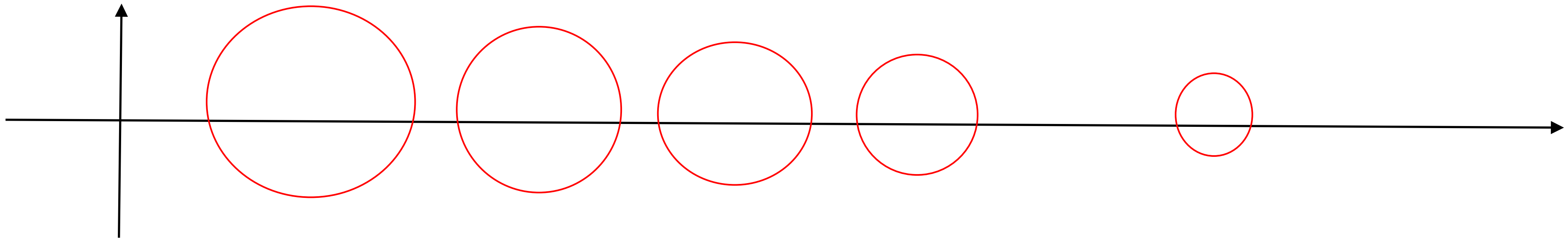
(1) A相似于对角阵.

(2) 如果A是实矩阵，则A 的特征值全是实数.

推论 1.2.2. 若矩阵A 的Gerschgorin区不含0，则A 一定可逆.

例:证明 $$A=\begin{pmatrix} 4 & \frac{1}{4} & (\frac{1}{4})^2 & \cdots & (\frac{1}{4})^{n-1} \\ \frac{1}{5} & 5 & (\frac{1}{5})^2 & \cdots & (\frac{1}{5})^{n-1} \\ \frac{1}{6} & (\frac{1}{6})^2 & 6 & \cdots & (\frac{1}{6})^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n+3} & (\frac{1}{n+3})^2 & \cdots & (\frac{1}{n+3})^{n-1} & n+3 \end{pmatrix}_{n\times n}$$ 可对角化,特征值均为实数,可逆.

解：n个行圆盘的半径都小于1，而圆心在 4,5，…，n+3



所以n个行圆盘互不相交，

n个行圆盘均在右半平面即不包含原点

A可逆

A有n个互不相同的特征值，故A可对角化且每个特征值都是实数。